



Meccanica quantistica una teoria “strana” del mondo microscopico

Kristian Piscicchia*

CREF - Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche “Enrico Fermi”

3 Febbraio 2021

EEE meeting

***kristian.piscicchia@cref.it**

Fisica e Metafisica

Fisica: cerca di rispondere alla domanda *come* ?

utilizzando la matematica sviluppa modelli che descrivono i processi osservati in natura

i modelli predicono delle conseguenze

ulteriori osservazioni confermano o smentiscono i modelli.

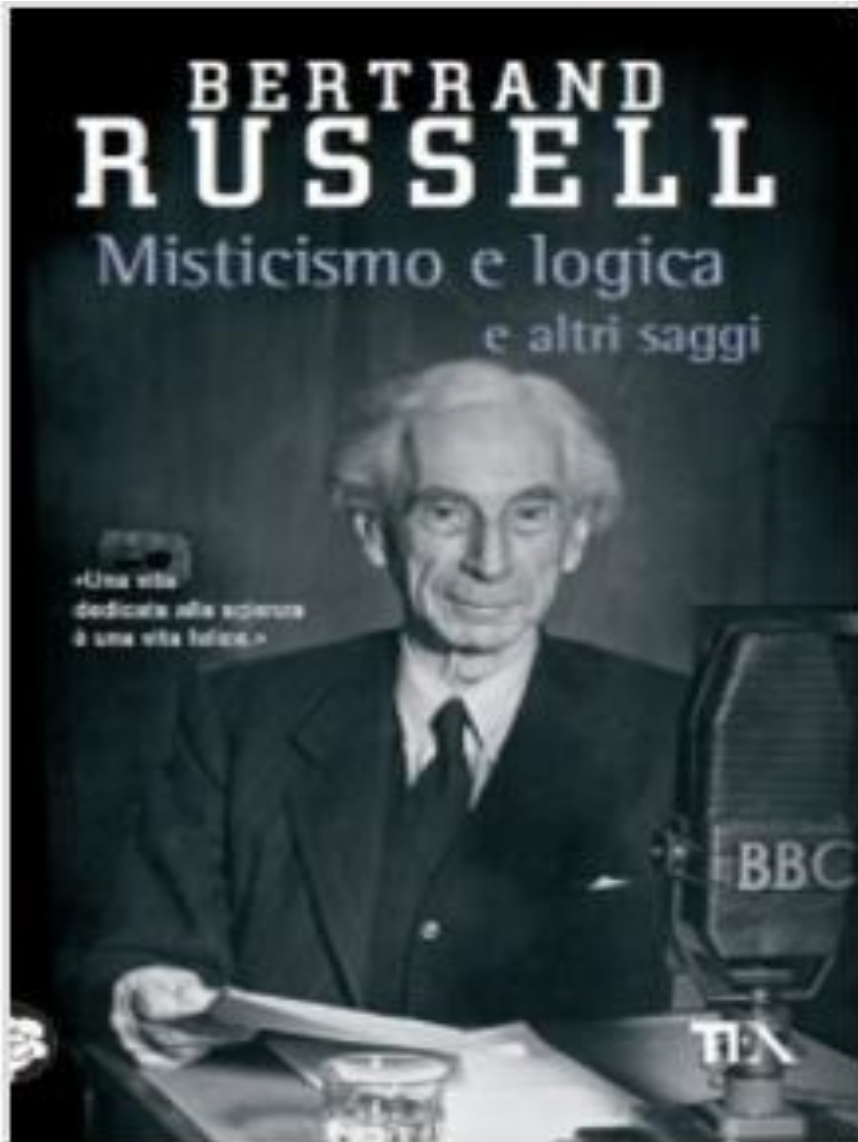


I modelli possono essere usati per sviluppi tecnologici

Metafisica: cerca di rispondere alla domanda *perché* ?



Fisica e Metafisica



Matematica ..
funziona sorprendentemente bene

Fisica e Metafisica

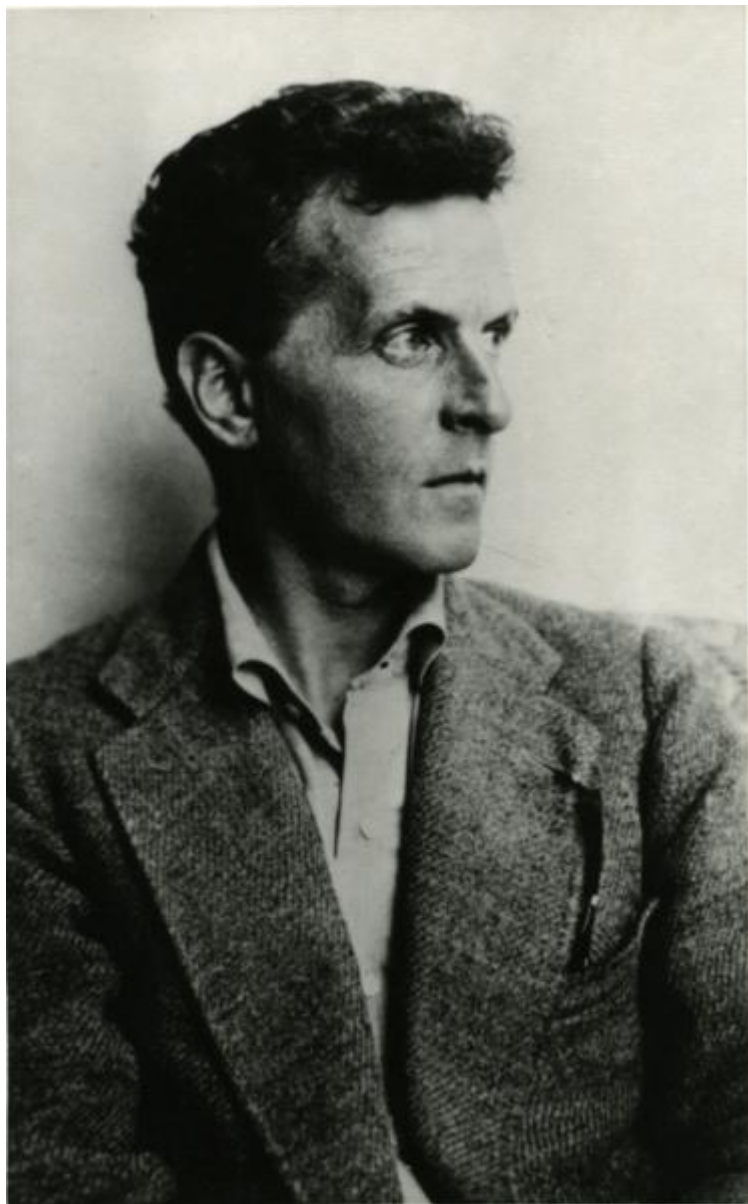


Matematica ..
sembra essere il
linguaggio della natura

Galilei, Il Saggiatore :

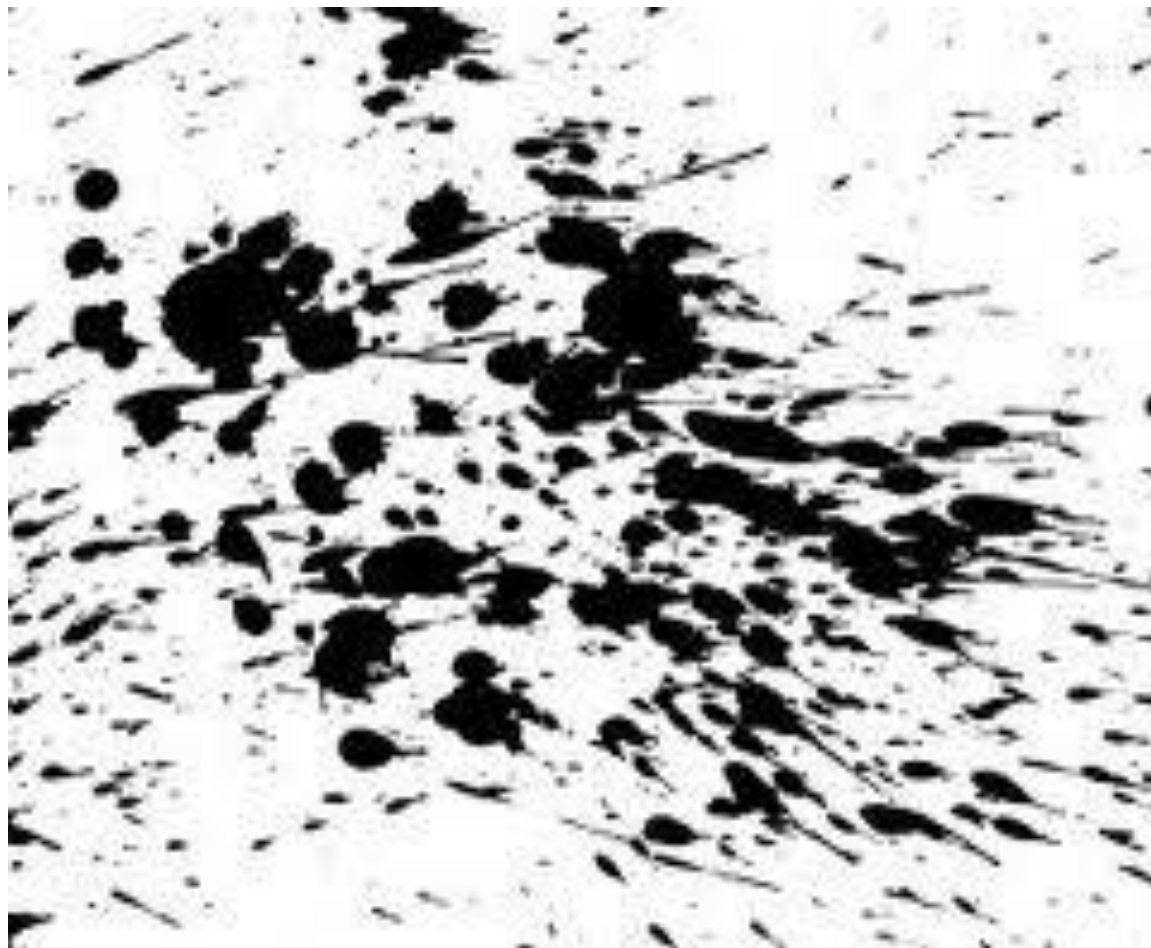
« La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.»

Fisica e Metafisica

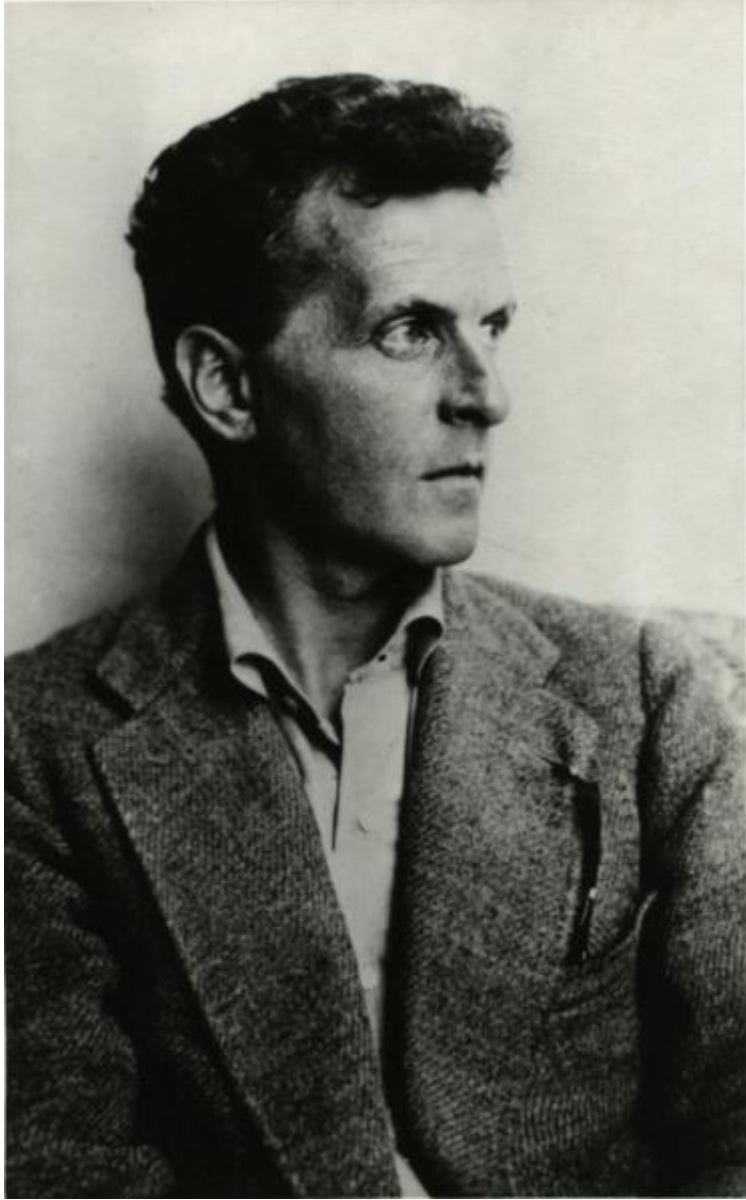


Ludwig Wittgenstein

Matematica ..
forse è il linguaggio che appare
più naturale alla nostra mente,
ma è l'unico possibile?

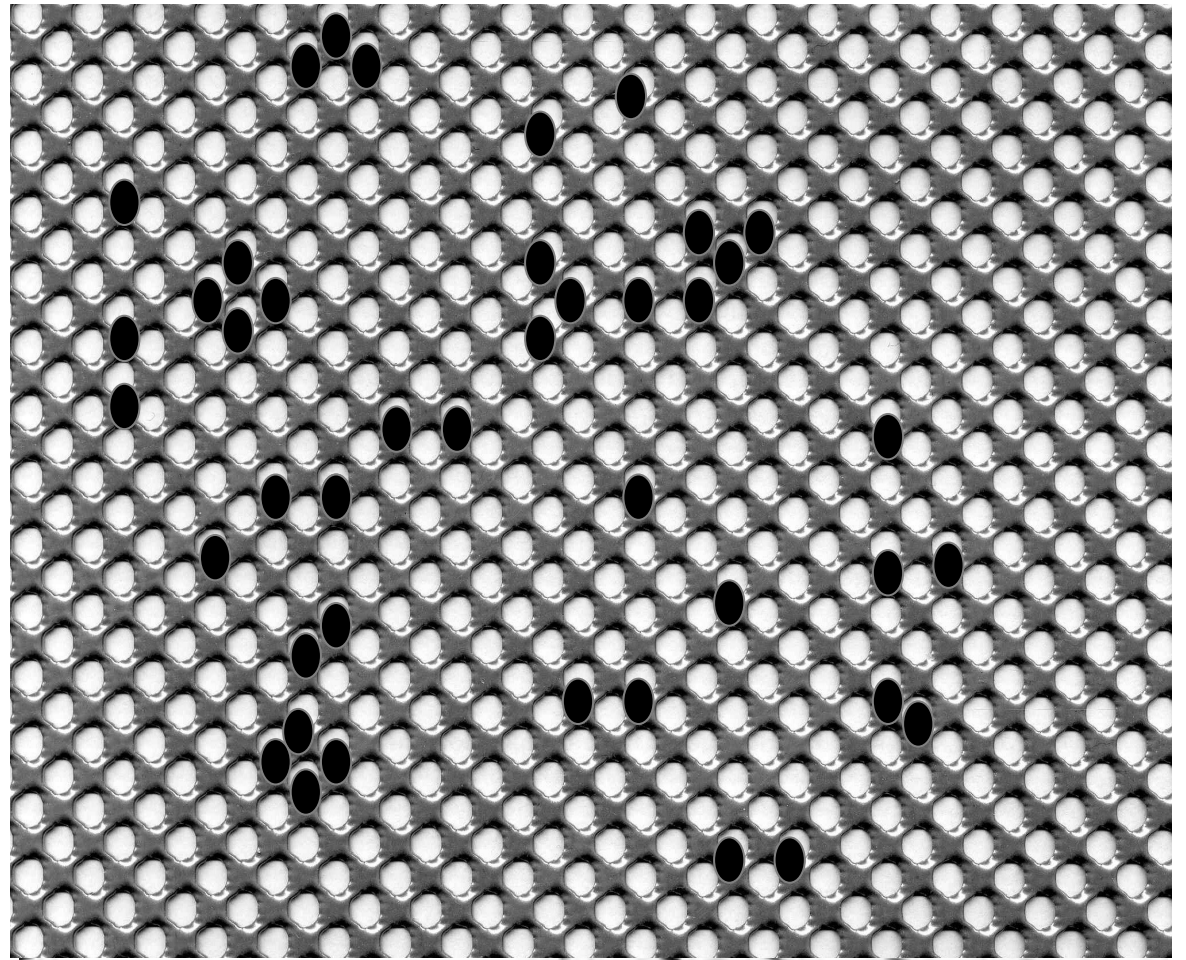


Fisica e Metafisica



Ludwig Wittgenstein

Matematica ..
forse è il linguaggio che appare
più naturale alla nostra mente,
ma è l'unico possibile?

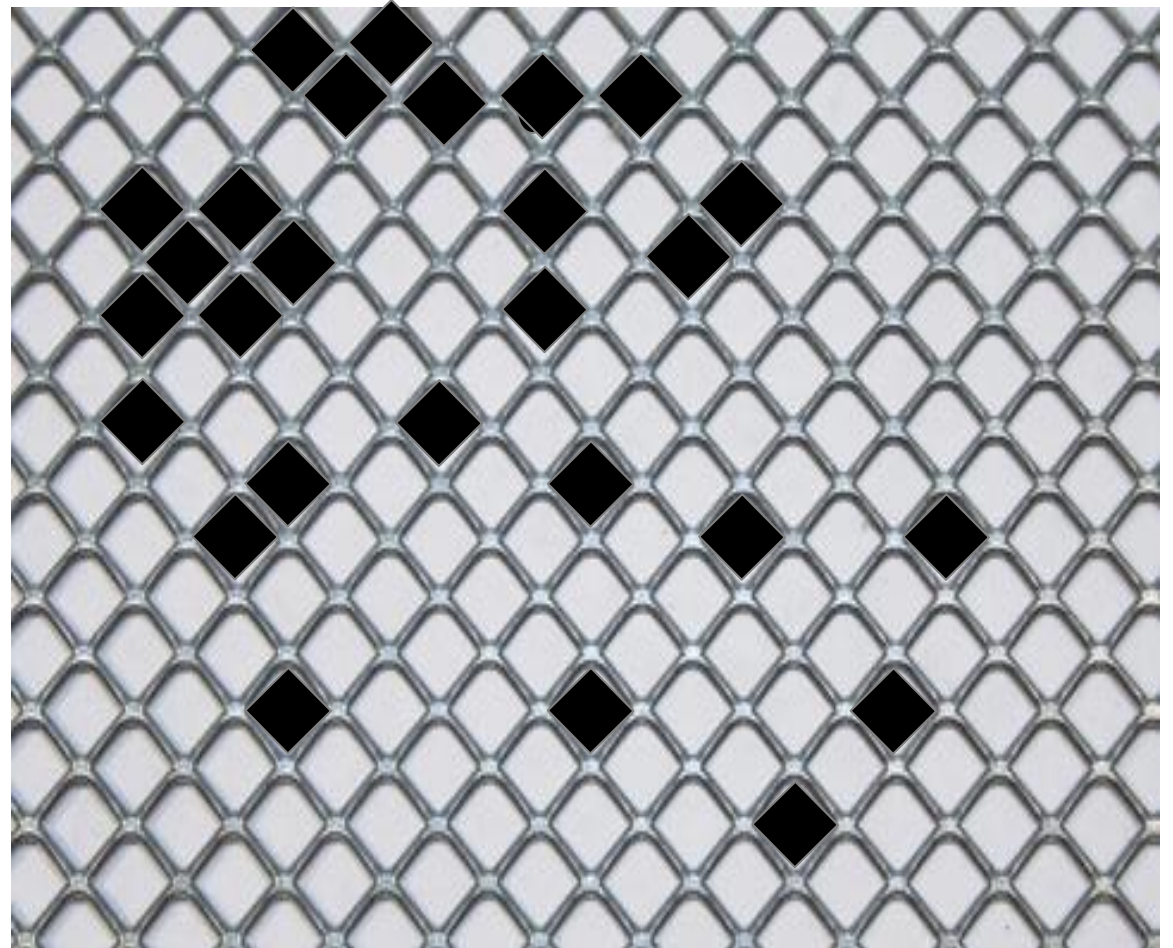


Fisica e Metafisica



Ludwig Wittgenstein

Matematica ..
forse è il linguaggio che appare
più naturale alla nostra mente,
ma è l'unico possibile?



Fisica e Metafisica

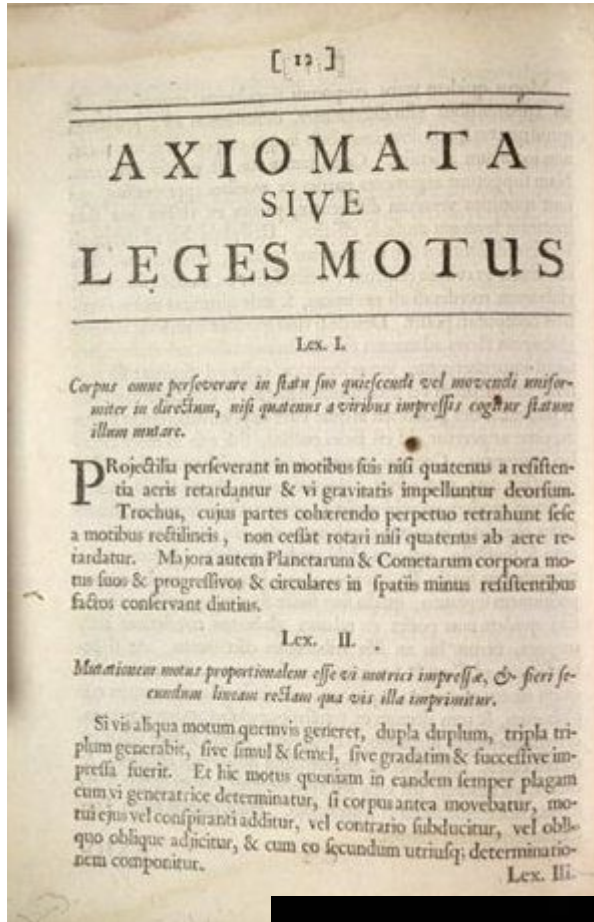


“La meccanica è un tentativo di costruire tutte le proposizioni vere, che ci servono per la descrizione del mondo, secondo un unico piano”

Tractatus logico-philosophicus

Ludwig Wittgenstein

La meccanica classica : una teoria assiomatica basta su tre principi ...



Newton 1687 *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*

1) una particella è ferma, oppure si muove con velocità costante lungo una retta → **nessuna forza** sta agendo sulla particella, la particella **non interagisce** con altre particelle

2) $F = ma$ opp. $F = d(mv)/dt$

↑
massa inerziale ↑
quantità di moto p

3) $F_{12} = -F_{21}$





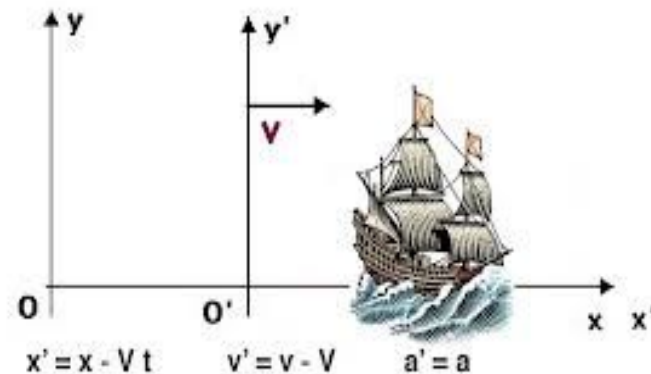
... più un piccolo ingrediente

Un tempo universale

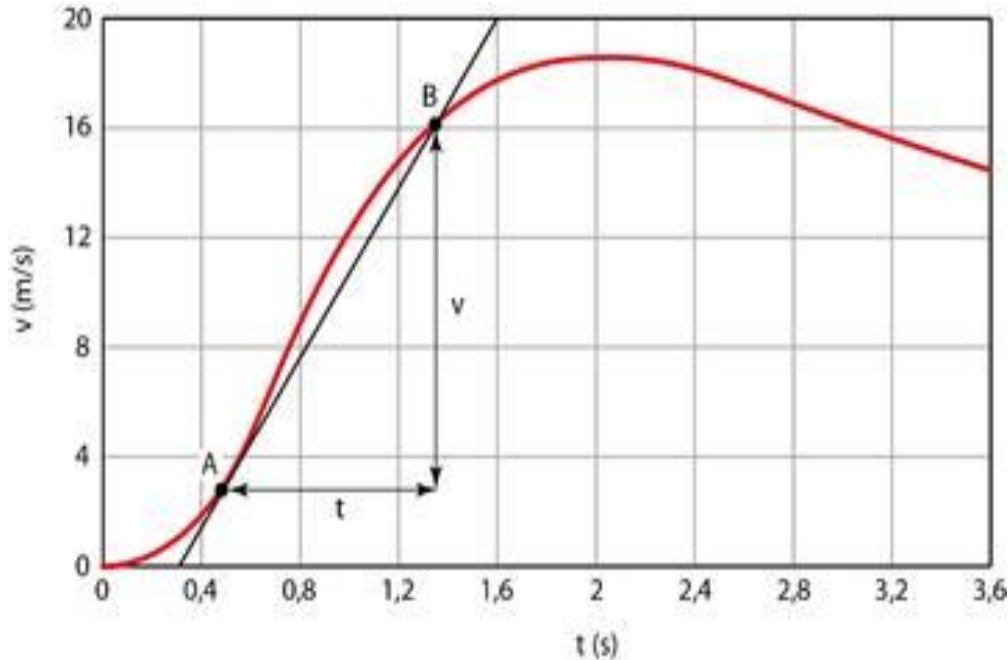
che scorra nello stesso modo in tutti i *sistemi di riferimento inerziali* (uno in moto rettilineo uniforme rispetto all'altro ovvero tutti quanti in moto rettilineo uniforme rispetto allo *spazio assoluto*)

da cui si ottengono le trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



L'accelerazione e la velocità

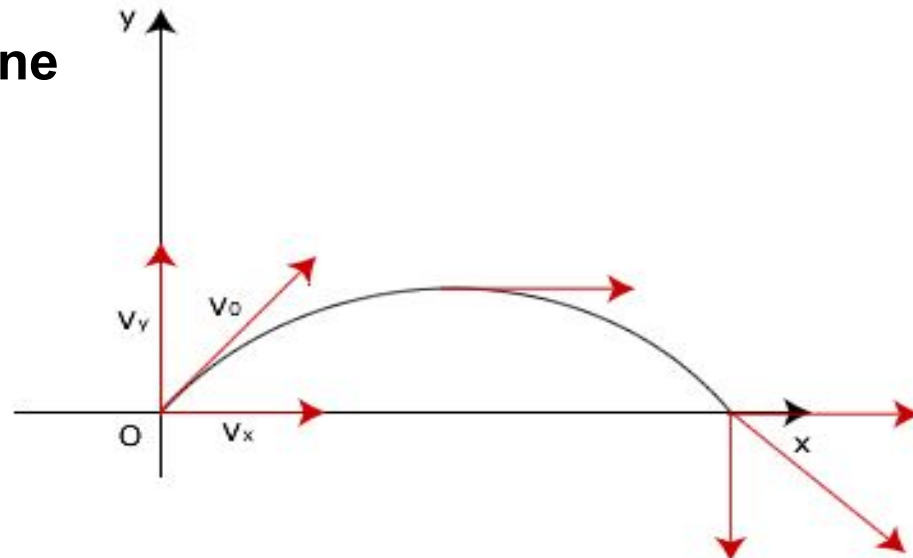


L'accelerazione è una misura della variazione della velocità nel tempo

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

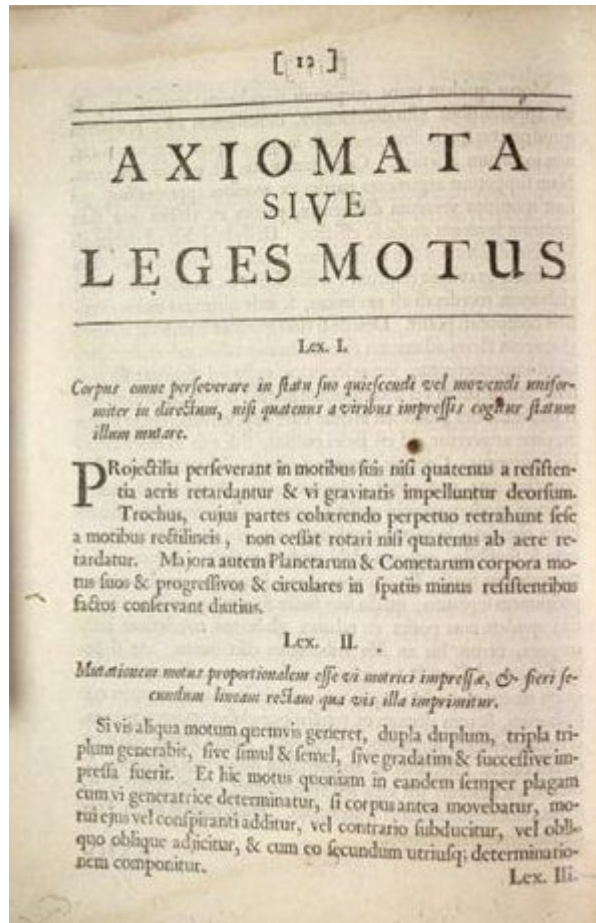
Velocità è una misura della variazione dello spazio percorso nel tempo

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Tutto si riduce alla traiettoria $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ di una particella come funzione del tempo

La meccanica classica : una teoria assiomatica basta su tre principi ...



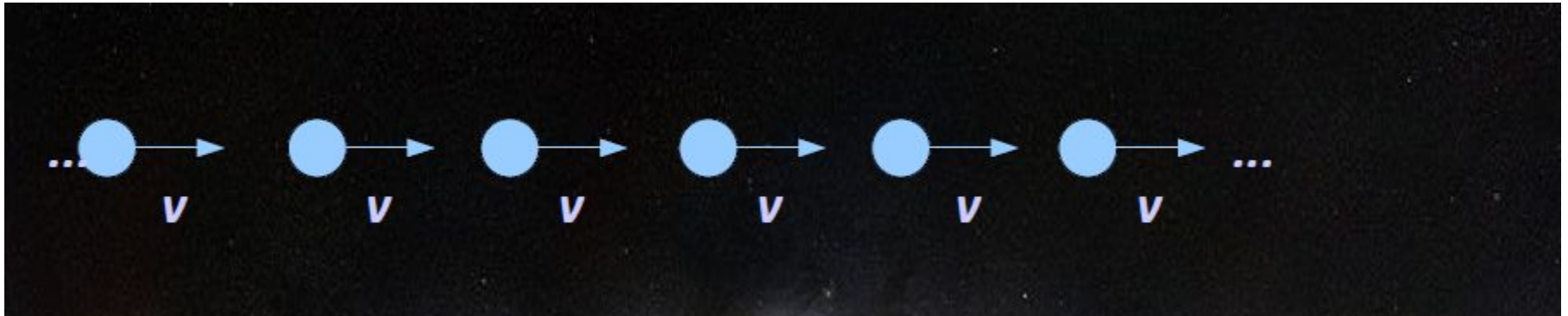
Oltre 200 anni di successo della meccanica classica anche dovuti ad una ontologia semplice e familiare:

**elementi base della teoria : punti di massa
(teoria facilmente generalizzabile ai corpi estesi)**

**immersi in uno spazio tridimensionale Euclideo
+ un tempo universale**

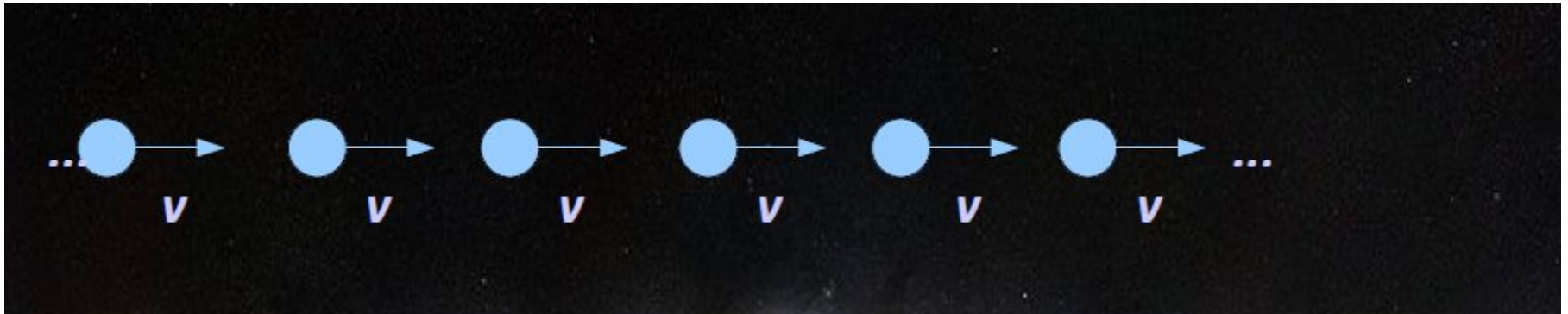
Dopo la forza .. l'*energia*

Una particella si muove nello spazio vuoto (assenza di attrito) ha **soltanto due possibilità** :



Dopo la forza .. l'*energia*

Possibilità 1: la particella si muove con velocità (v) costante lungo una retta
(se la velocità è zero la particella è ferma)



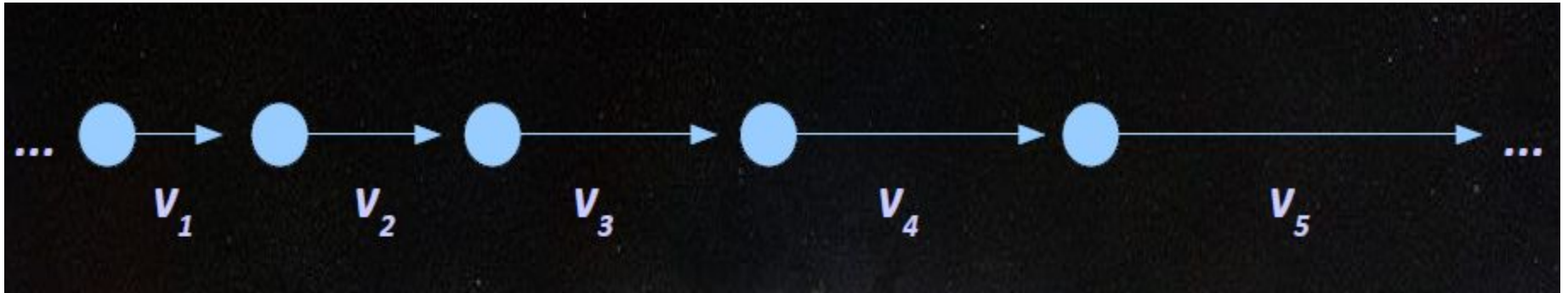
Nessuna forza sta agendo sulla particella → la particella *non sta interagendo con nessun corpo*

la particella ha una energia dovuta al solo fatto che ha una velocità v

SOLO ENERGIA CINETICA: $T = \frac{1}{2} m v^2$

Dopo la forza .. l'energia

Possibilità 2: la particella si muove con **velocità ($v(t)$)** che **cambia istante per istante** (è una funzione di t)



una forza sta agendo sulla particella → la particella **sta interagendo con qualche altro corpo**

la particella ha una **energia cinetica T** dovuta al fatto che ha una velocità v
+

la particella ha una **energia potenziale U** legata alla forza impressa dal corpo interagente

ENERGIA TOTALE: $E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + U$

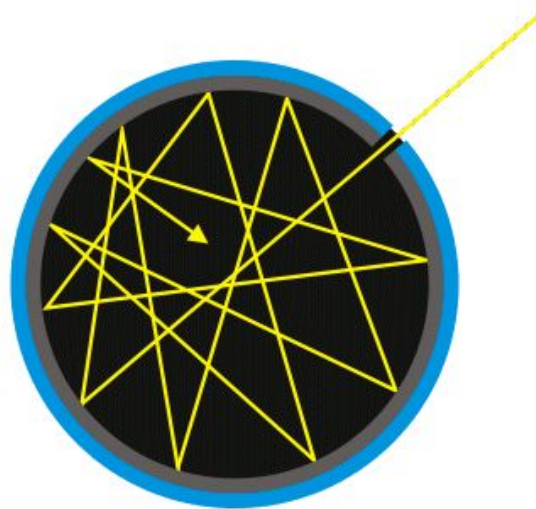
Crisi della meccanica classica ..

la Meccanica Quantistica

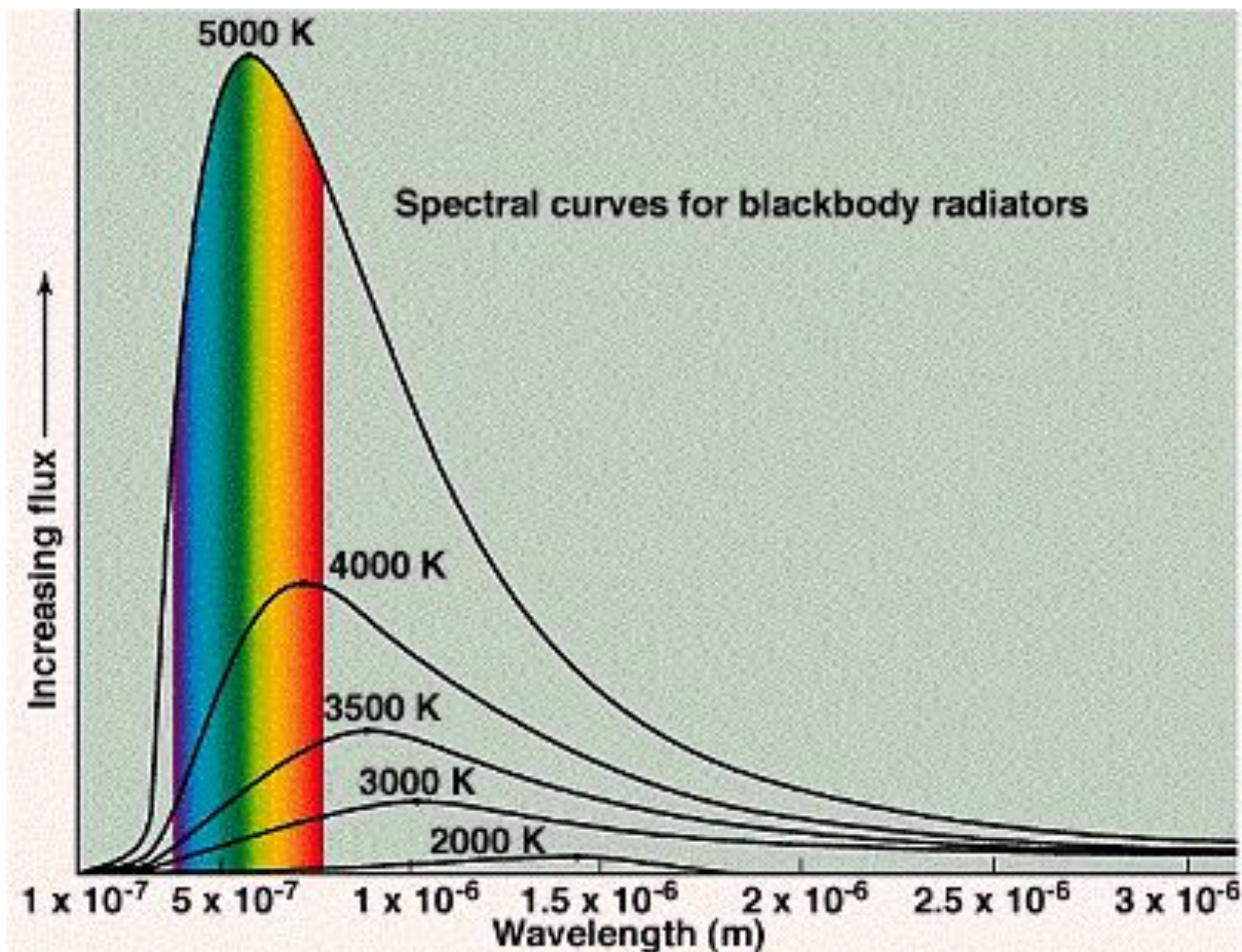
IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

Irraggiamento termico: ogni corpo (composto di particelle cariche in moto accelerato dovuto all'agitazione termica) alla temperatura T emette radiazione elettromagnetica a tutte le frequenze.

Radiazione di corpo nero: quella emessa da un corpo in grado di assorbire la radiazione incidente a tutte le λ . Ex. una cavità perfettamente isolata, internamente in equilibrio termico a temperatura T , che emette attraverso un foro.

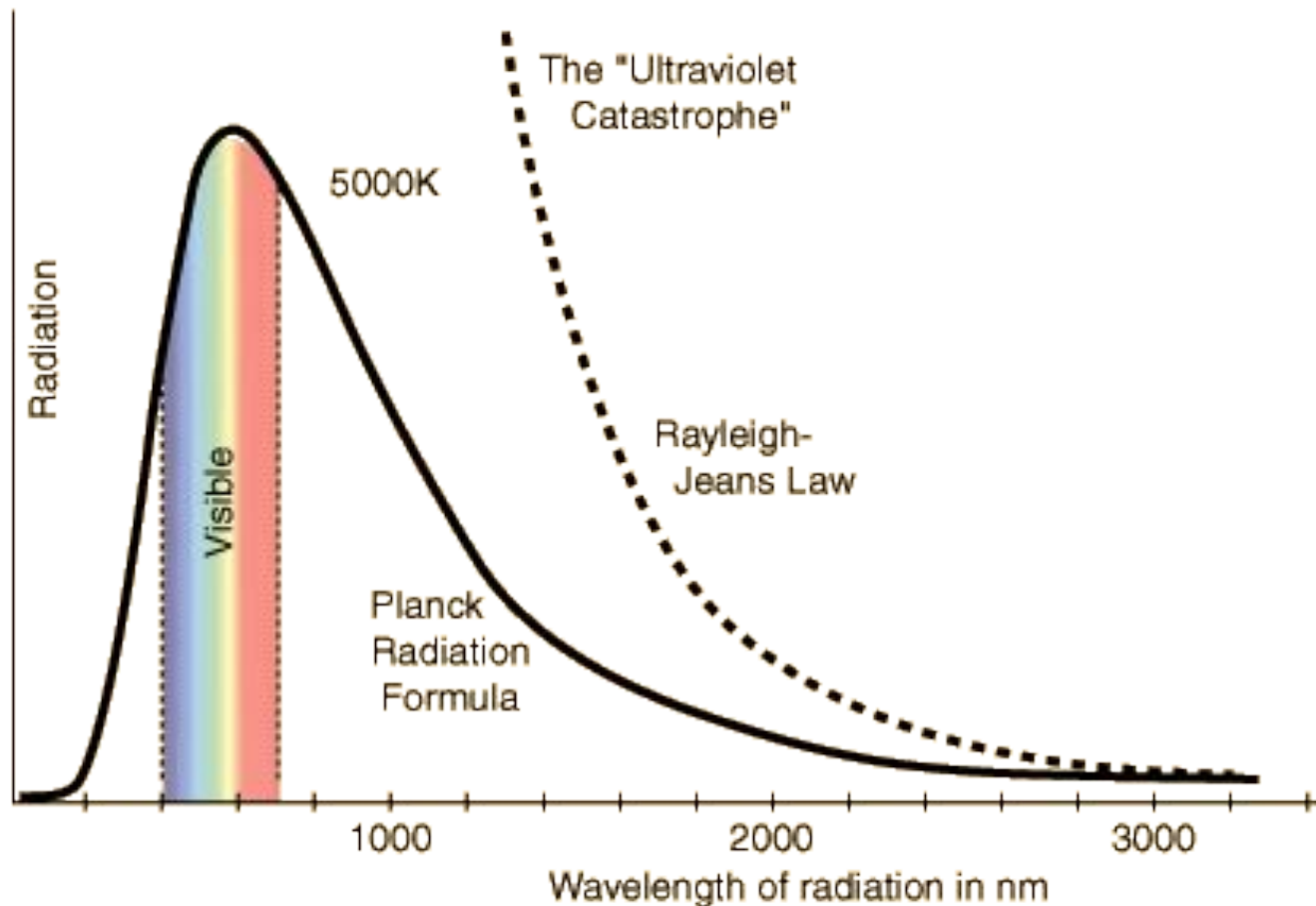


Conceptual Black Body

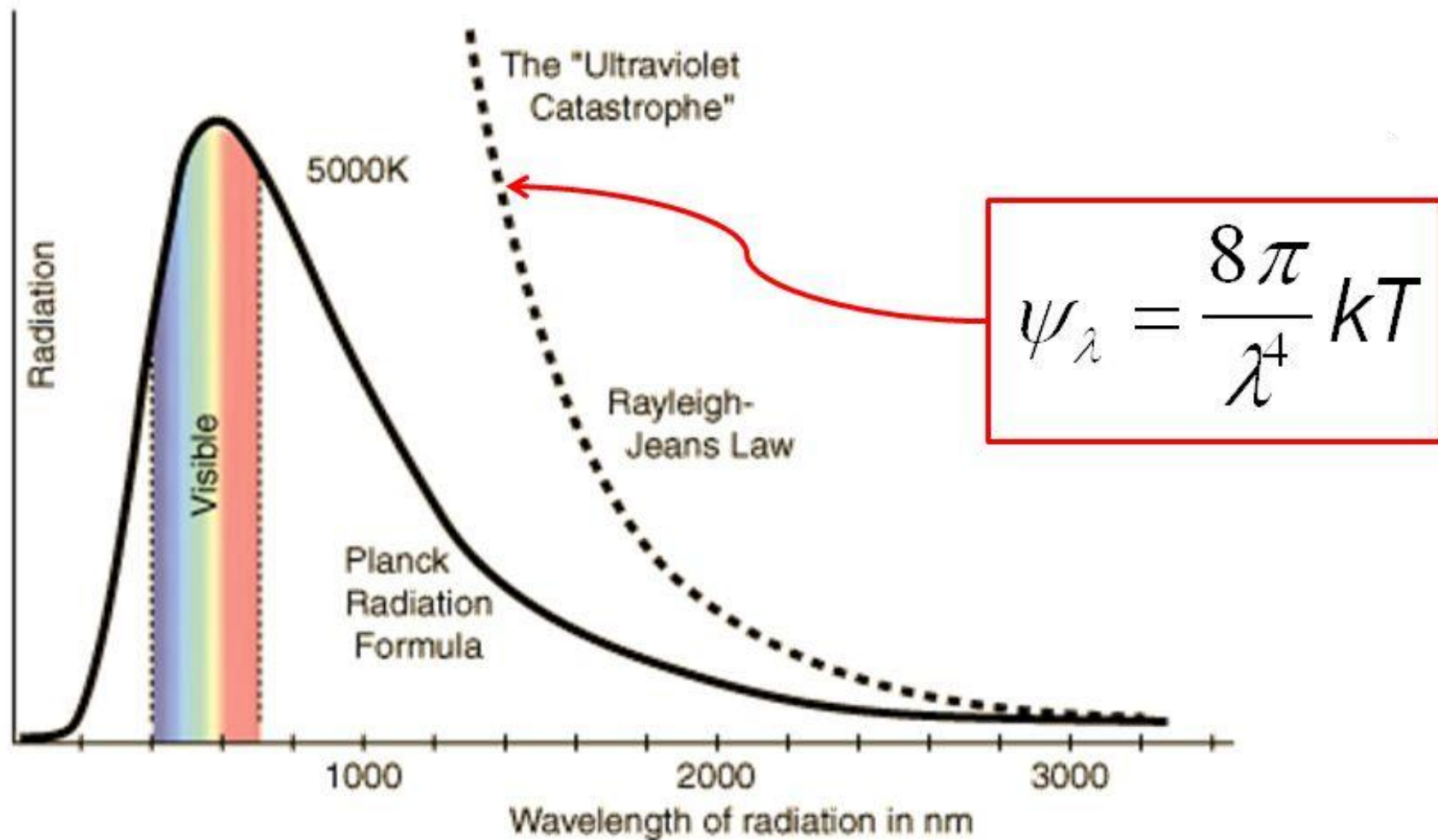


IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

In accordo con la teoria classica la **distribuzione spettrale dell'energia e.m. emessa** (potenza per unità di frequenza, o per unità di lunghezza d'onda) doveva divergere all'aumentare dell'energia, in contrasto con le verifiche sperimentali.



La "catastrofe ultravioletta"



- Wien : formula empirica e valida solo a piccole λ
- Rayleigh-Jeans : formula coerente, ma valida solo ad alte λ

1900 => Planck ricavò la distribuzione spettrale dell'irraggiamento termico che riproduce perfettamente i dati sperimentali, introducendo **un'ipotesi rivoluzionaria**: il corpo irraggiante emette e assorbe energia elettromagnetica in **“pacchetti di energia”**, in quantità discrete, detti **quanti**. L'energia di un quanto è proporzionale alla frequenza della radiazione e.m., ν

$$E = h\nu$$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \Rightarrow$ il quanto di energia è piccolo su scale macroscopiche, **non ci accorgiamo della “granularità” dell'energia a livello macroscopico**

Viene introdotta **per la prima volta l'idea che le grandezze fisiche** (in questo caso l'energia) **siano quantizzate**, cioè possano assumere valori discreti e non più continui, come avveniva nella meccanica classica.

Campo di radiazione Termico: Corpo Nero

L'irraggiamento di corpo nero è espresso dalla legge di Planck:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Hz}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Dove:

h è la costante di **Planck**

$$h = 6.57 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$$

k è la costante di **Boltzmann**

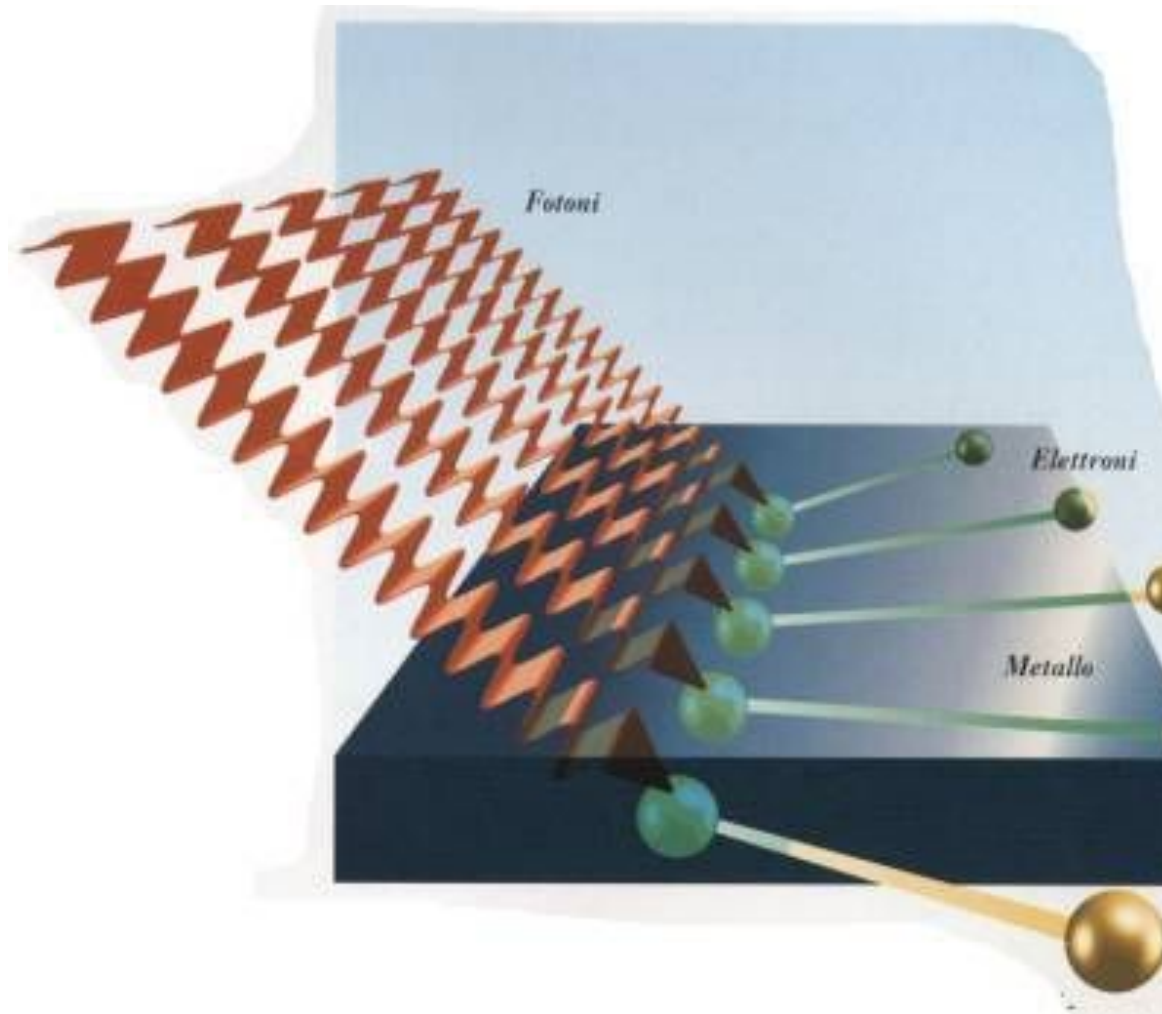
$$k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}\cdot\text{s}.$$

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$$

La funzione $B(\nu, T)$ esprime l'irraggiamento per unità di superficie per unità di tempo per unità di banda nell'unità di angolo solido (cioè per steradiante).

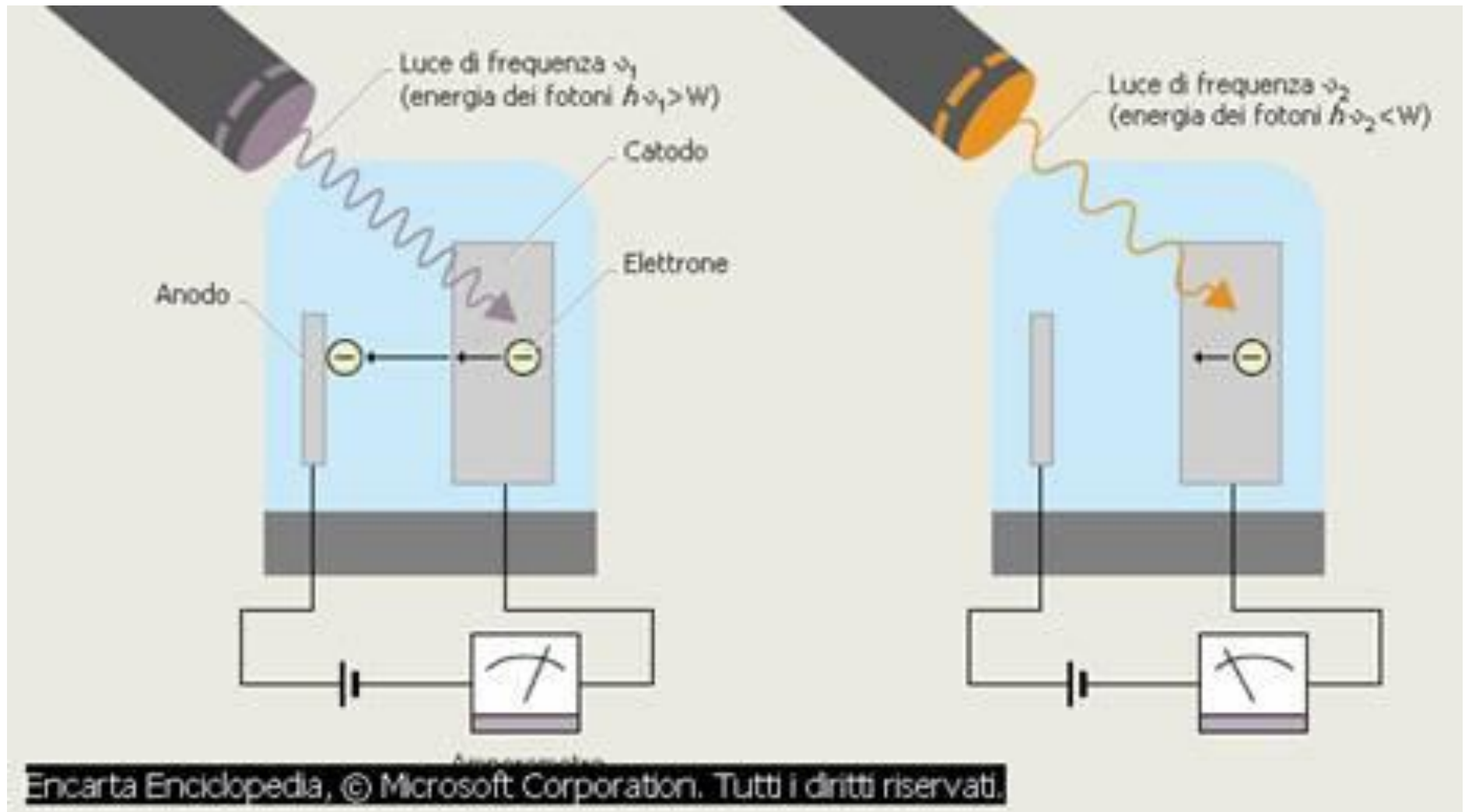
L'EFFETTO FOTOELETTRICO – “corpuscoli di luce”

Effetto fotoelettrico: emissione di elettroni da parte di un metallo che si verifica quando esso è colpito da radiazione e.m. con una frequenza superiore ad un certo valore di soglia che dipende dal tipo di metallo. (Sfruttato oggi nelle cellule fotoelettriche e per l'uso dell'energia solare).



effetto fotoelettrico

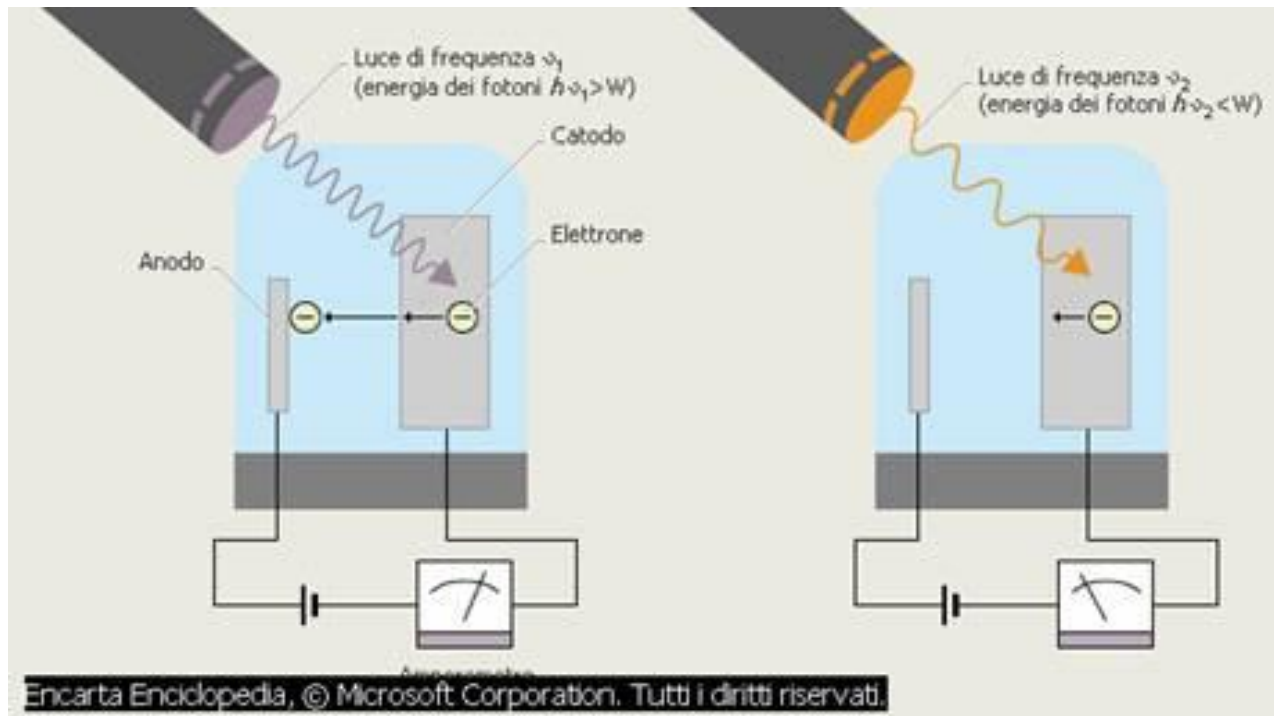
Hertz 1887 , Lenard 1900



effetto fotoelettrico

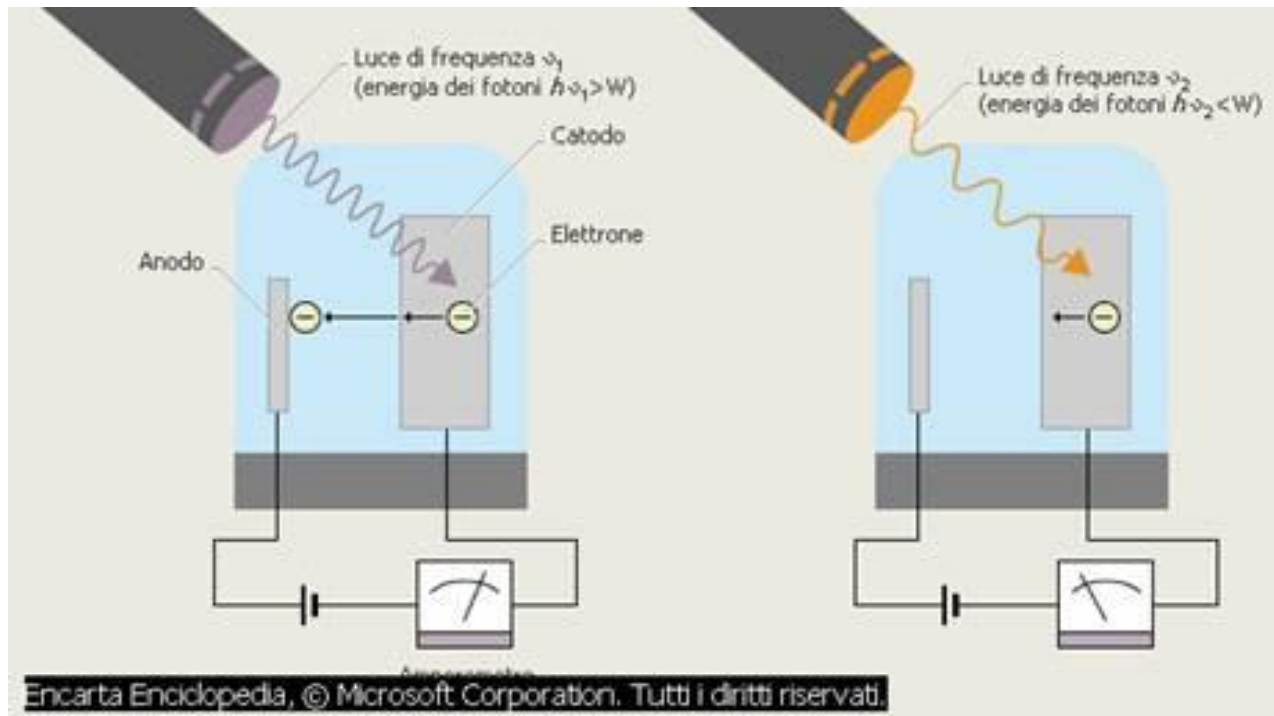
risultato atteso dall'elettromagnetismo classico:

- l'elettrone nel metallo ha un'energia di legame W
- intensità radiazione elettromagnetica: $I \propto \langle U \rangle_t$
- all'aumentare dell'intensità vengono emessi elettroni con energia cinetica $T = E - W$
- l'emissione è ritardata, il tempo di ritardo dipende dall'intensità.



effetto fotoelettrico

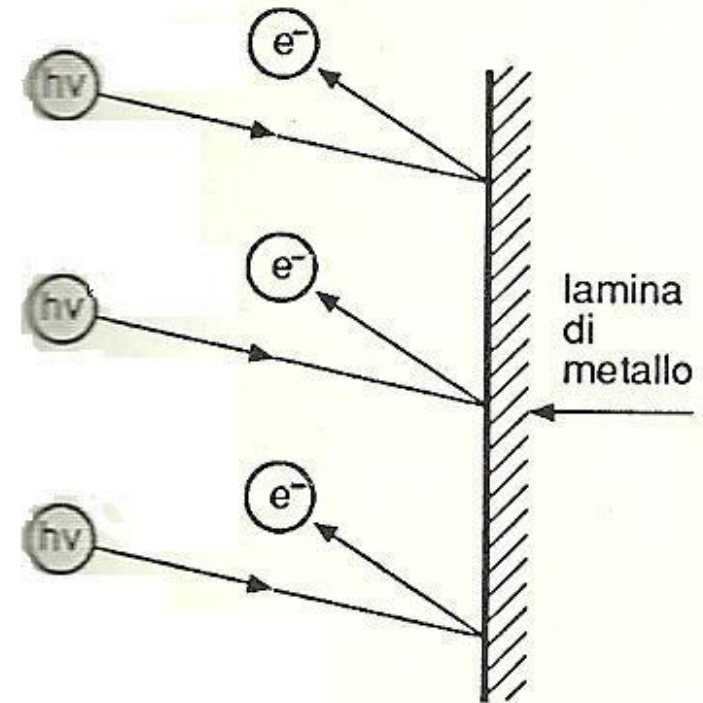
- esiste una frequenza minima della luce al di sotto della quale non sono emessi foto-elettroni
- aumentando l'intensità della luce \rightarrow aumenta il tasso di fotoelettroni emessi \rightarrow aumenta la corrente ma NON aumenta l'energia cinetica massima degli elettroni (che può essere misurata con un potenziale negativo di cut-off)
- il ritardo tra arrivo della radiazione e fotoemissione è minore di 10^{-9} s



effetto fotoelettrico

Aspetti sperimentali:

- *Energia e^- emessi:*
 1. non dipende dall'intensità della luce
 2. Dipende dalla frequenza della luce
- Numero di e^- emessi dipende dall'intensità della radiazione



Einstein:

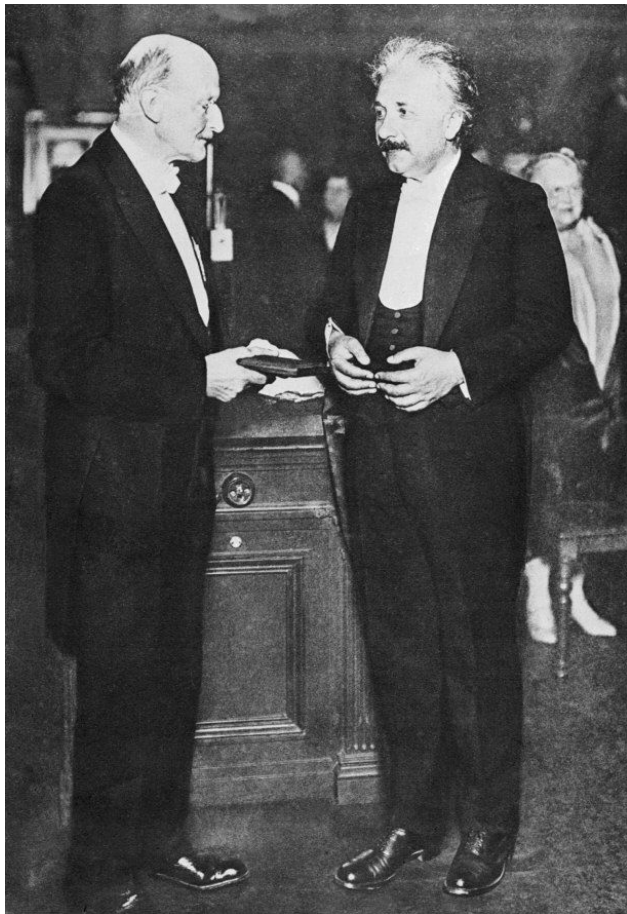
- l'energia della radiazione elettromagnetica non è distribuita sul fronte d'onda.
- I fotoni (quanti di energia) devono portare energia maggiore dell'energia di legame dell'elettrone.
- l'energia del fotone dipende dalla frequenza
- l'intensità della luce è proporzionale al numero di fotoni

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f \equiv \hbar\omega$$

effetto fotoelettrico

Einstein:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f \equiv \hbar\omega$$



The Nobel Prize in Physics 1921 was awarded to Albert Einstein

"for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the **photoelectric effect.**"

Ritorno ad una descrizione corpuscolare della radiazione (Newton).

Ma come spiegare il fenomeno di interferenza della luce, perfettamente compreso in una descrizione ondulatoria della radiazione?

Prima comparsa del dualismo onda-particella.

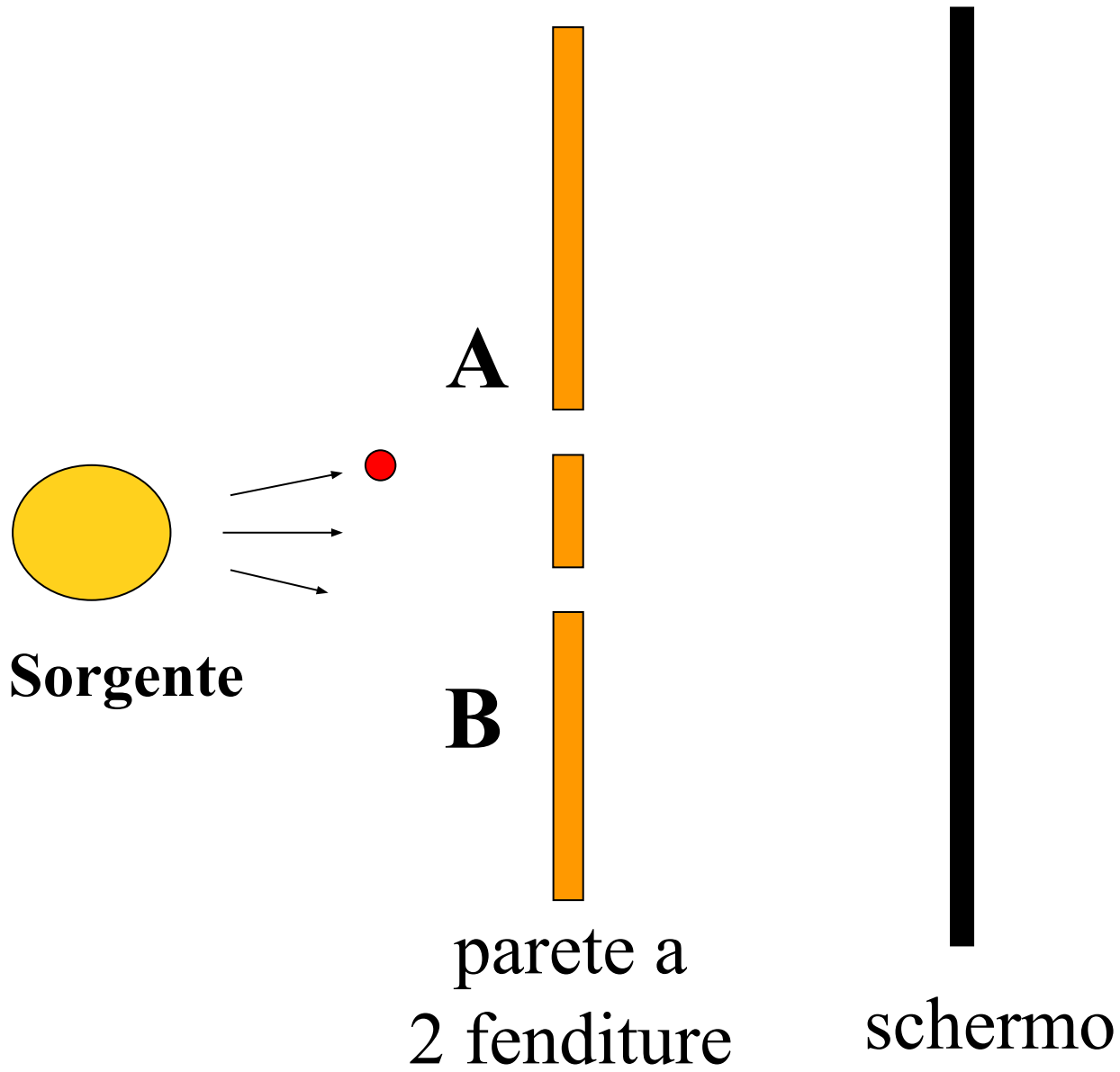
ONDE DI MATERIA DI DE BROGLIE (1924)

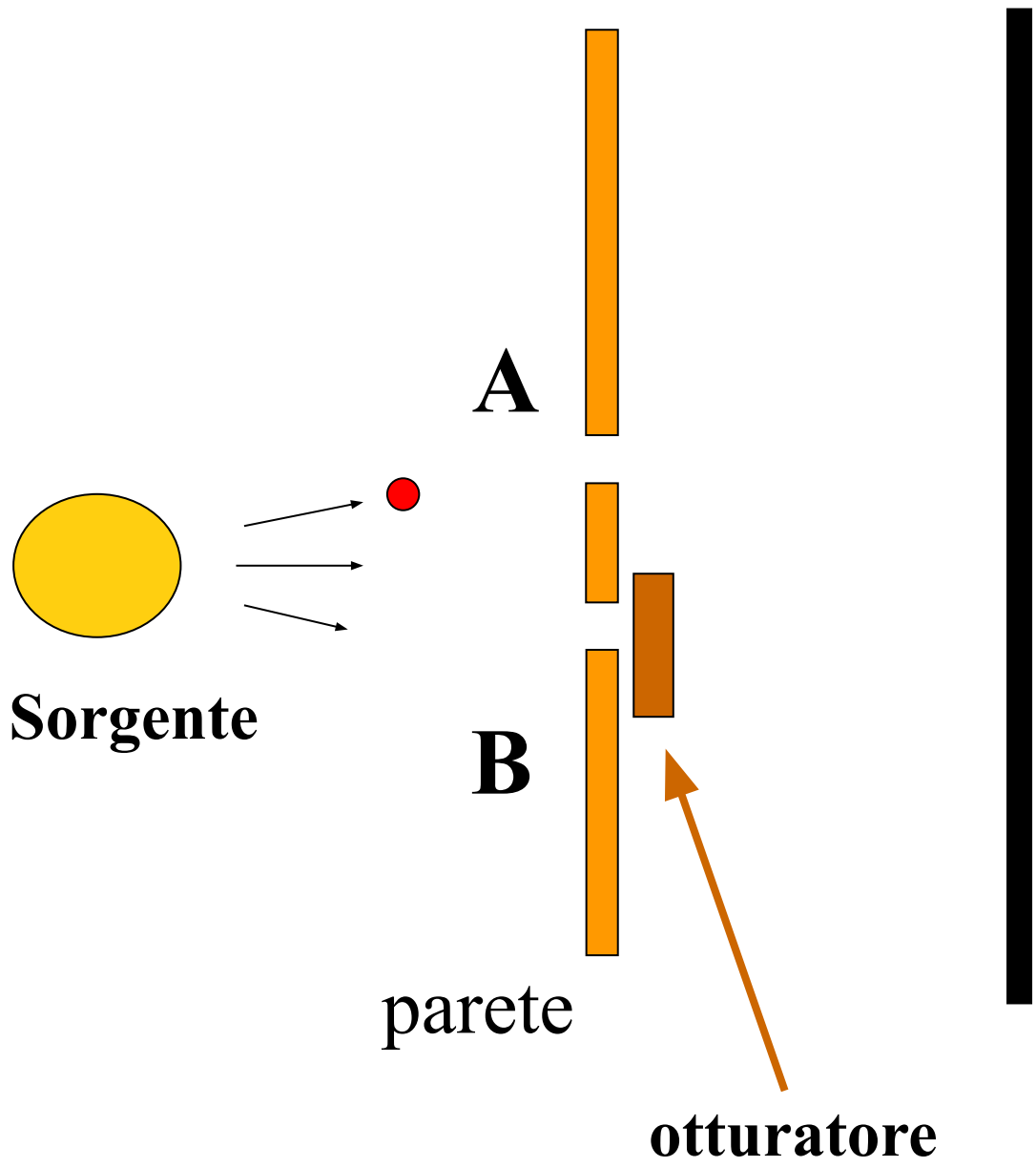
La radiazione elettromagnetica presenta sia aspetti ondulatori che corpuscolari. Per simmetria ci si può aspettare che ciò accada anche per la materia.

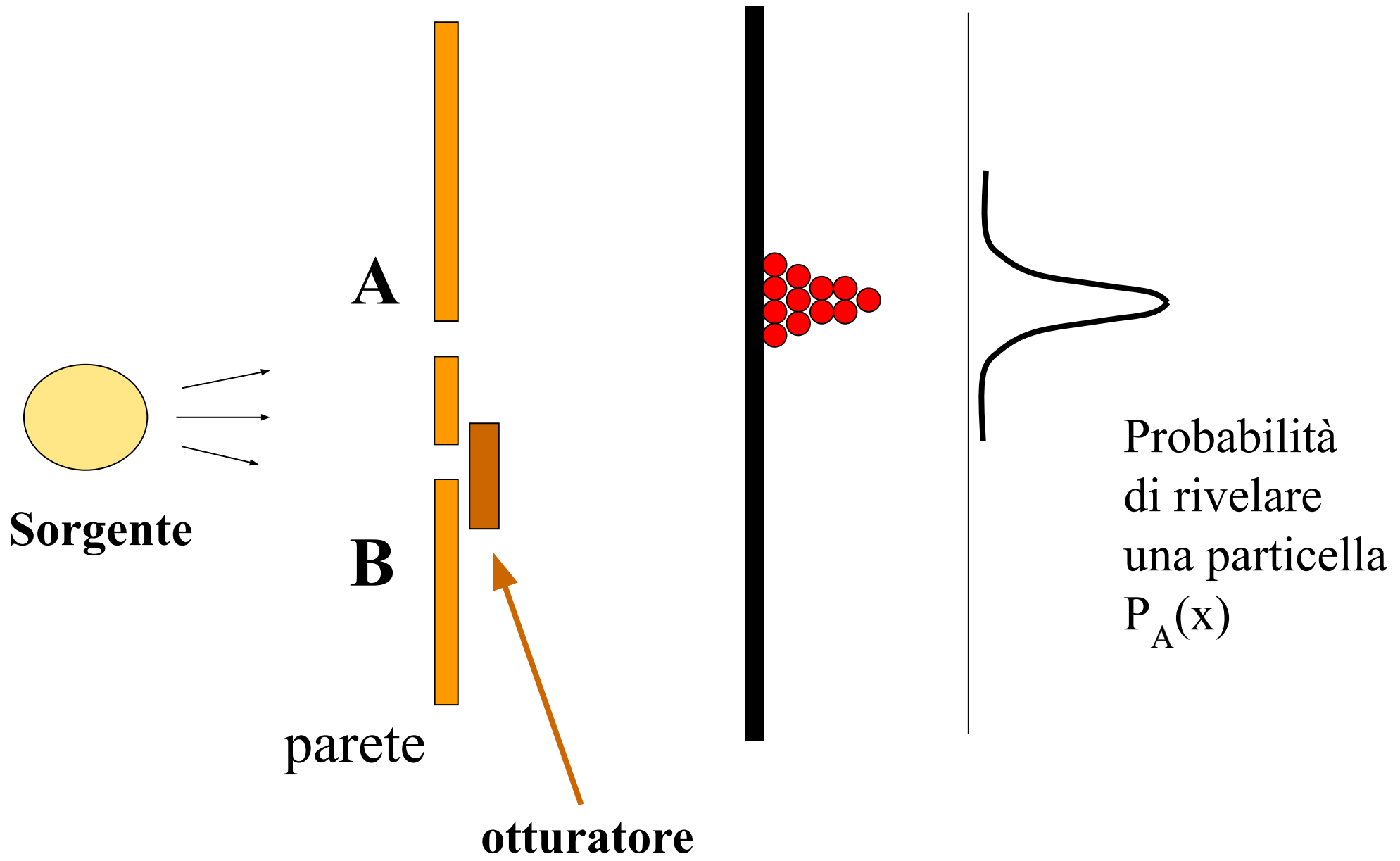
Ipotesi di de Broglie (1924): la materia può comportarsi come un'onda: **ad ogni particella che si muove con quantità di moto p , viene associata un'onda piana** di lunghezza d'onda

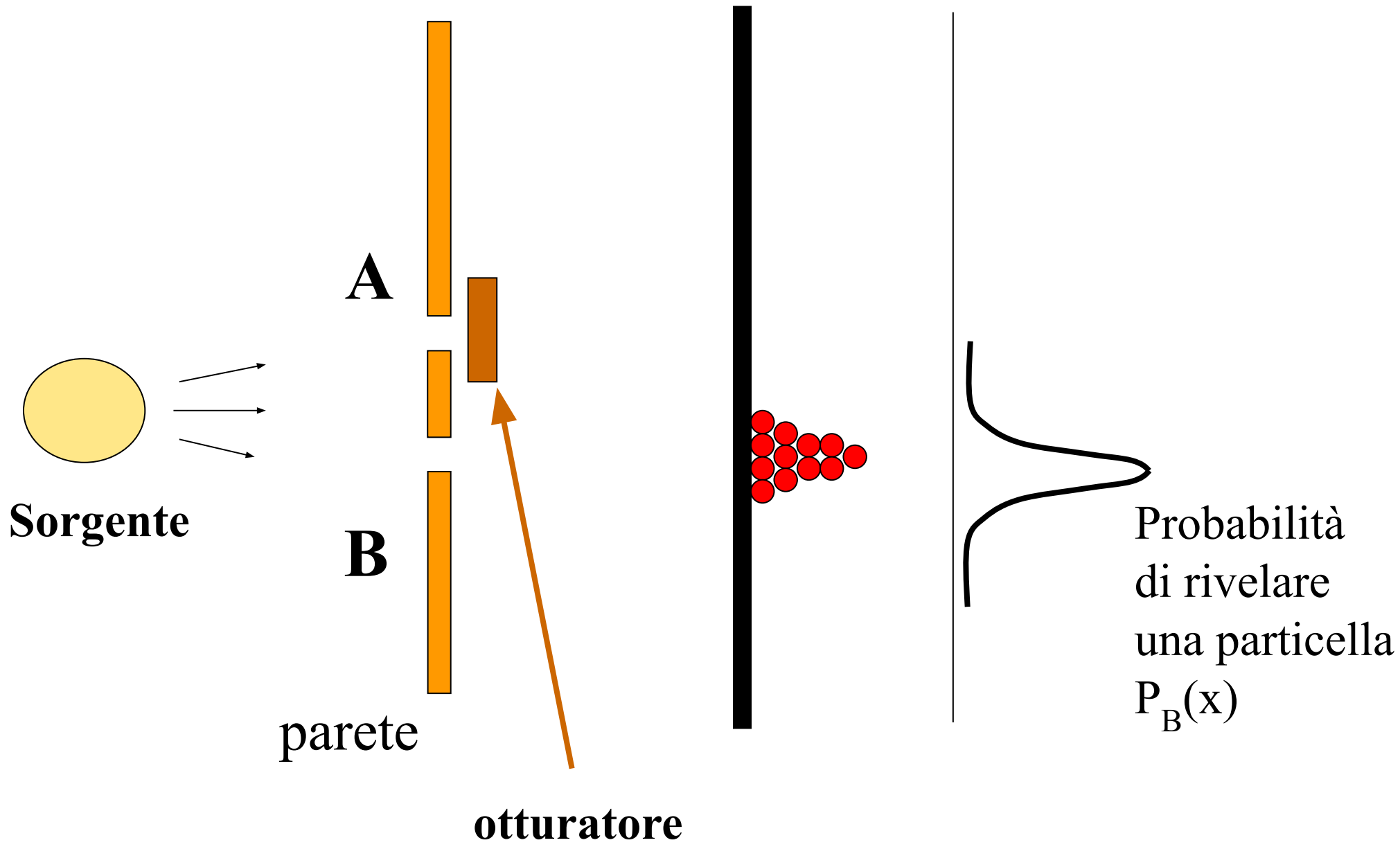
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Le particelle possono presentare quindi fenomeni di interferenza e diffrazione, dimostrato sperimentalmente per gli elettroni la prima volta nel 1927 da Davisson e Germer.

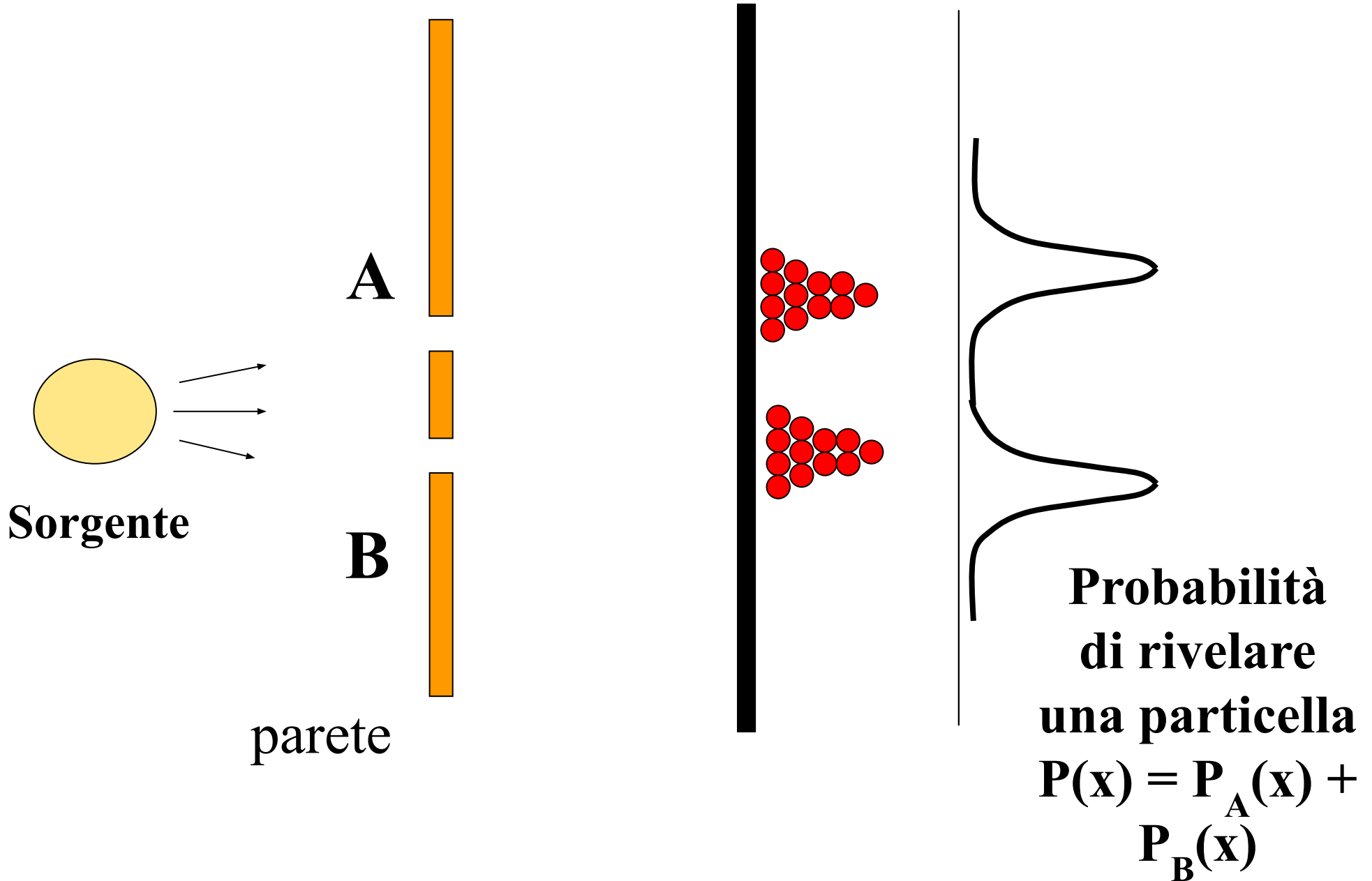






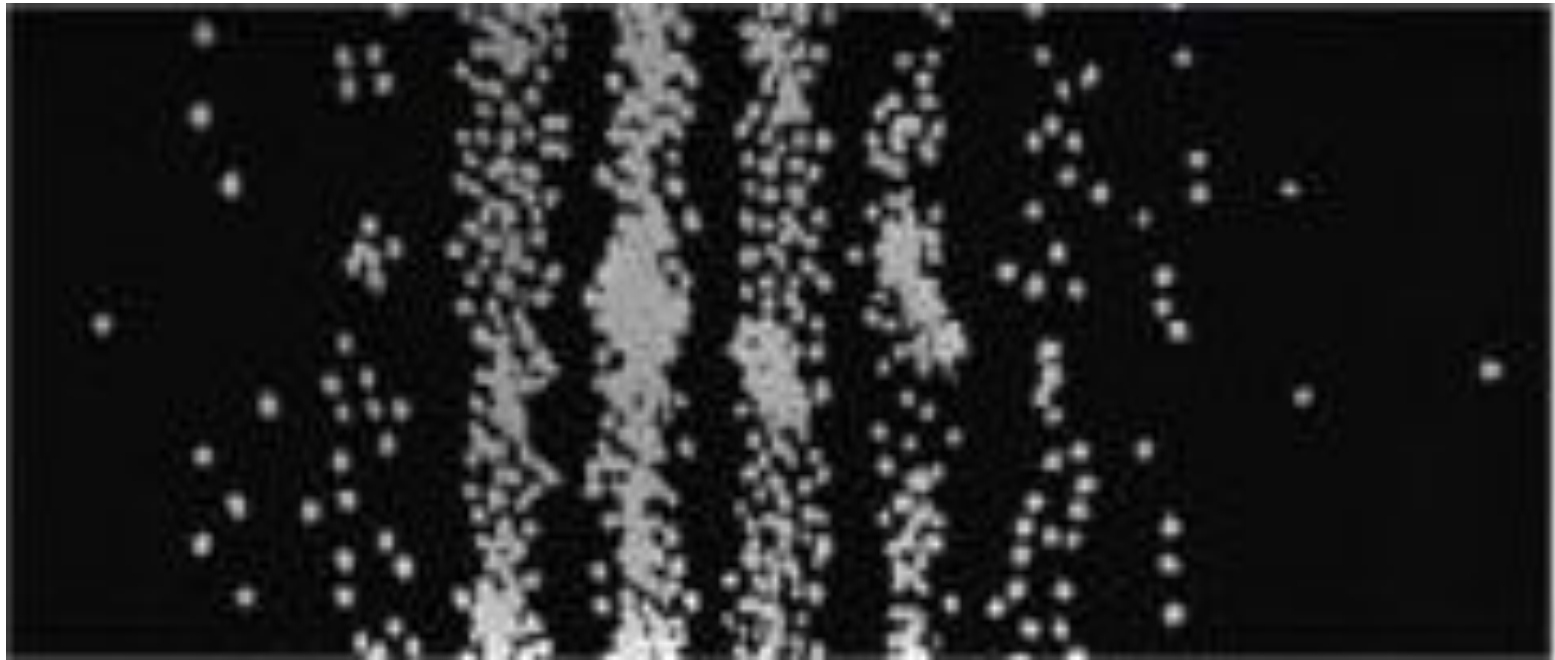


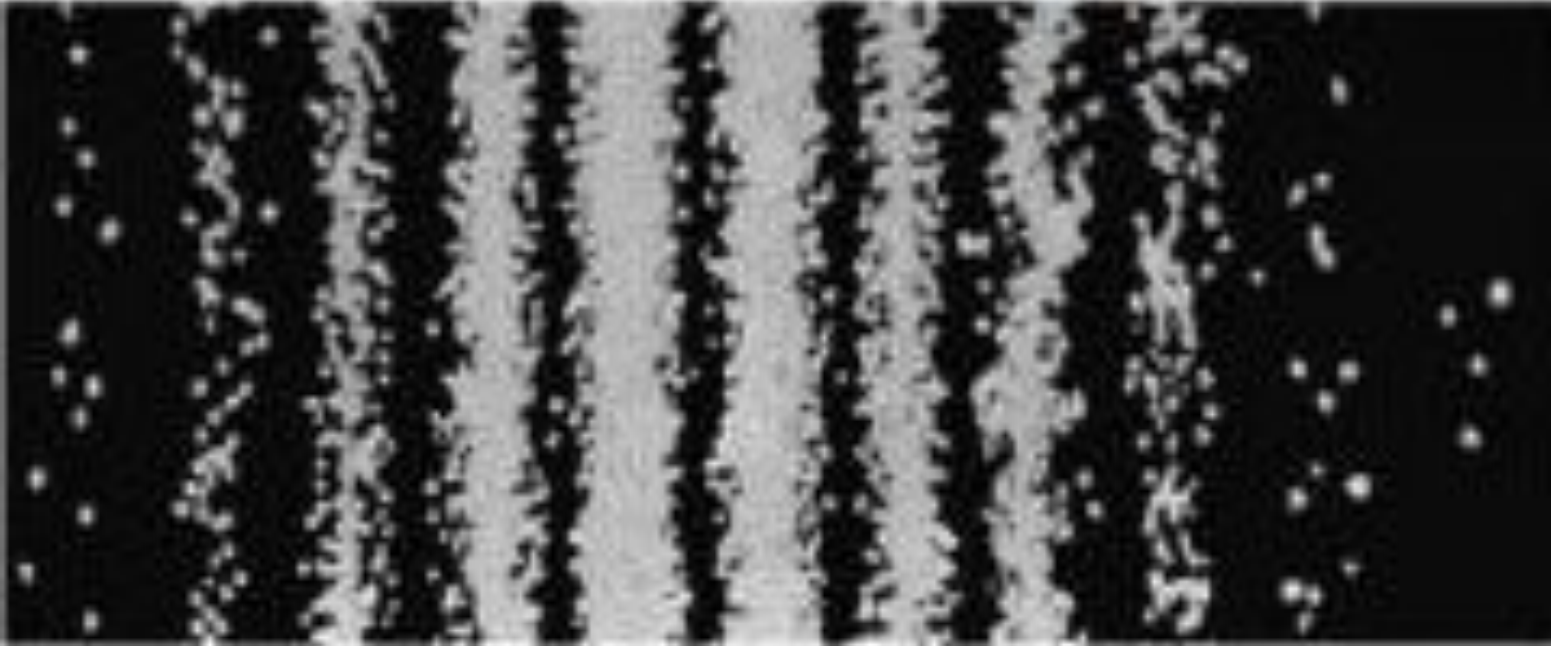
Comportamento “classico”



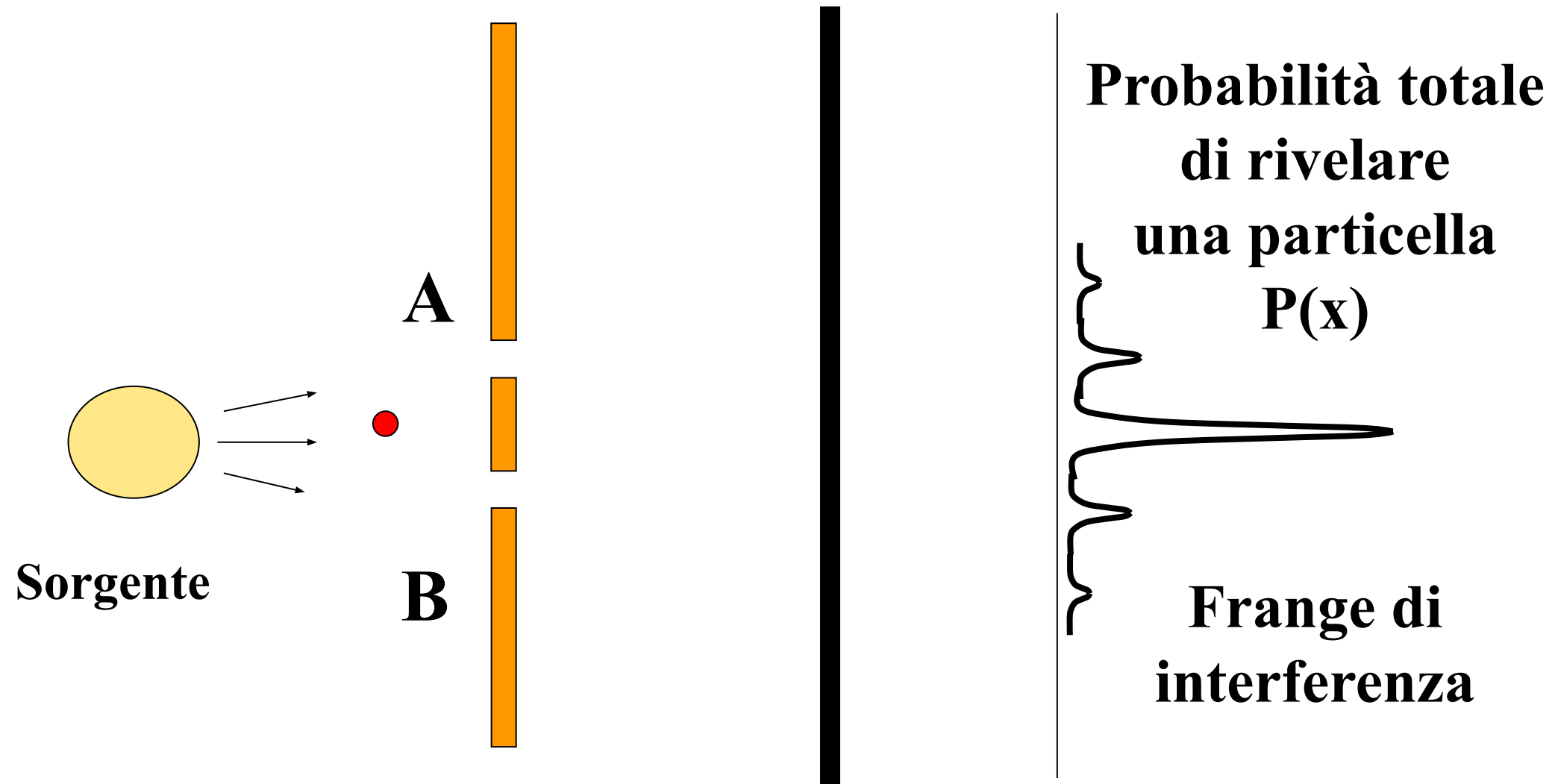








Interferenza quantistica

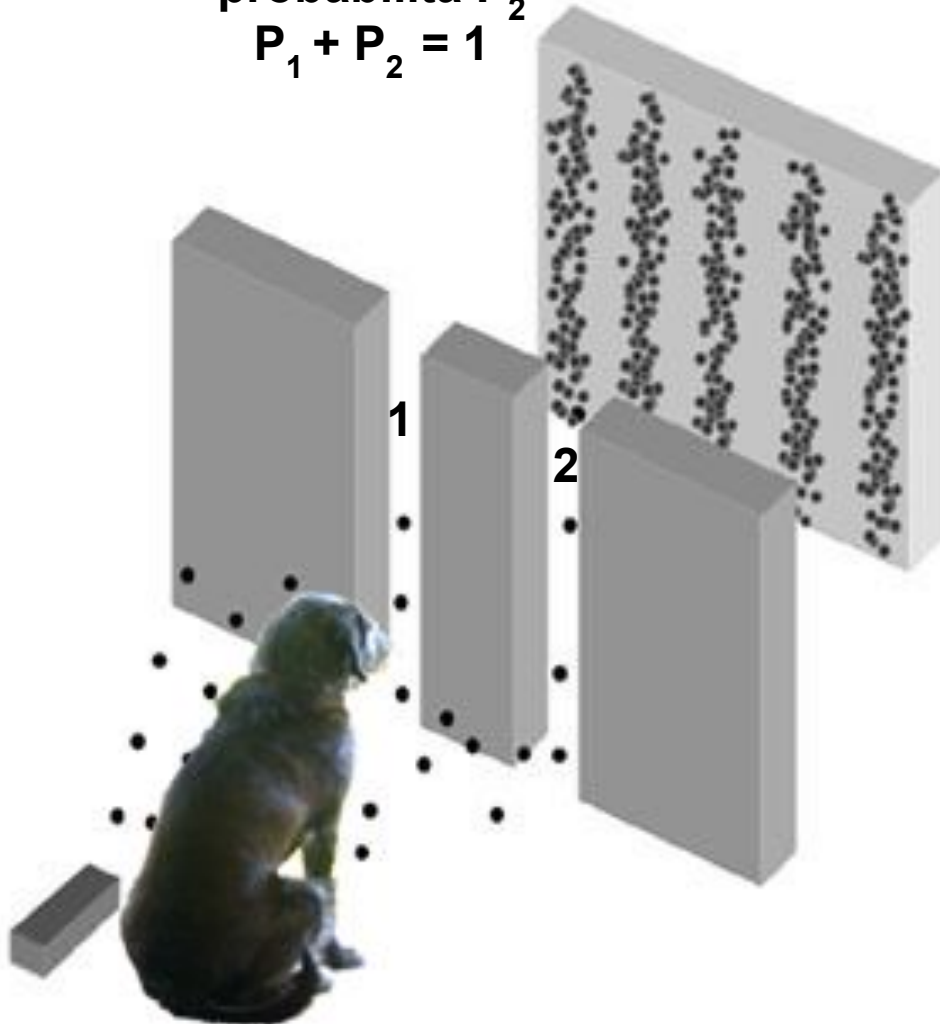


Anche gli elettroni mostrano interferenza!

Mettiamo un osservatore...

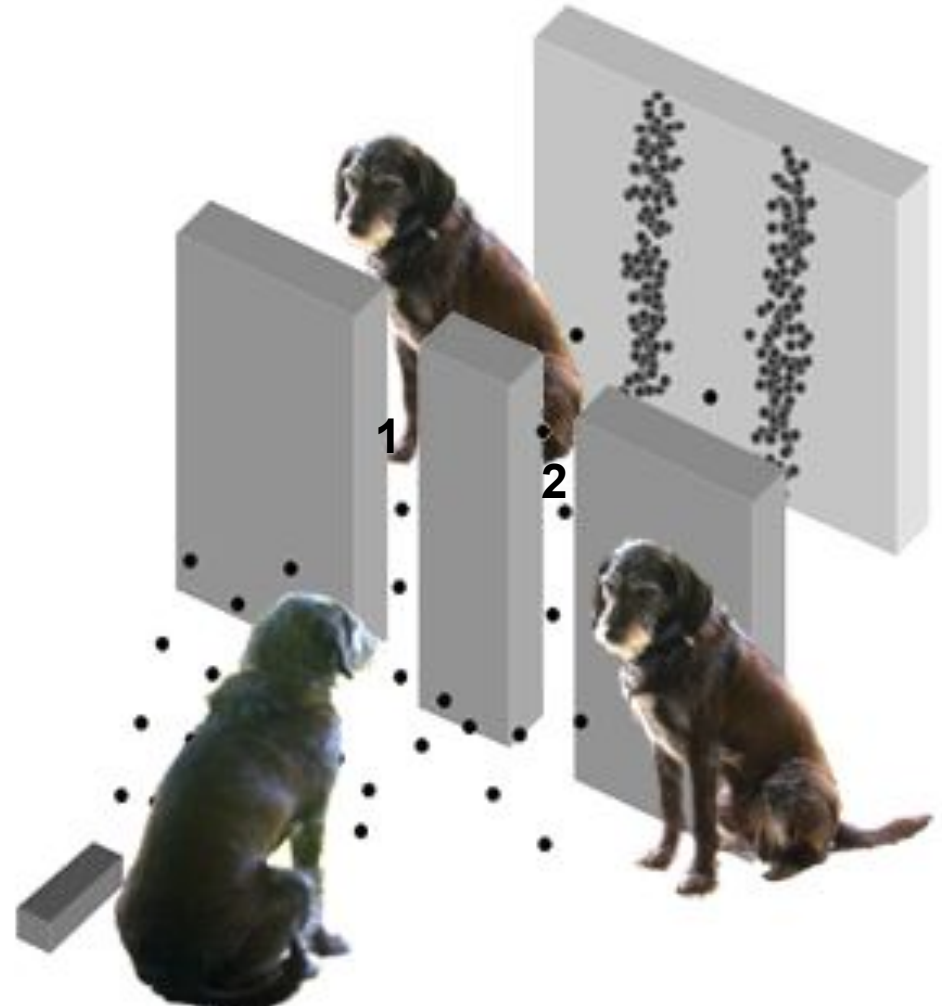
Lascio passare un elettrone per volta ..
interferisce con se stesso!!!

L'elettrone attraversa una fenditura con una
probabilità P_1 E l'altra fenditura con
probabilità P_2
 $P_1 + P_2 = 1$

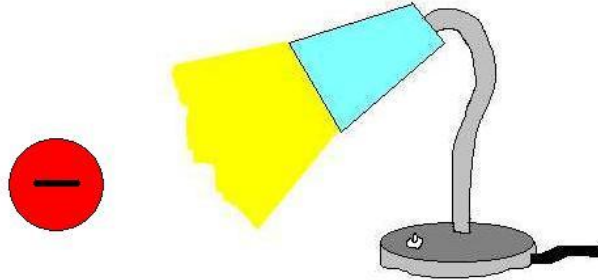


Se invece osservo in quale fenditura passa
l'interferenza scompare:

l'elettrone passa in 1 $\rightarrow P_1 = 1$
l'elettrone passa in 2 $\rightarrow P_2 = 1$

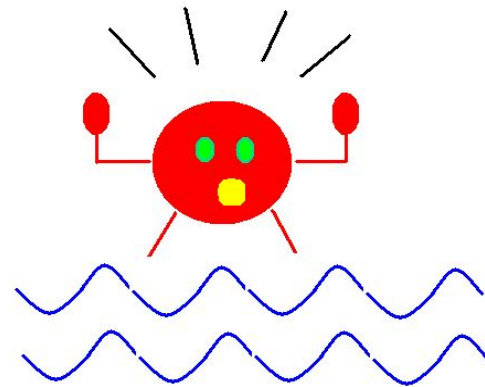


L'osservatore in meccanica quantistica



Questa interazione perturba l'oggetto (ad es. un elettrone) osservato

Per osservare qualcosa dobbiamo farlo interagire con uno strumento di misura



Esiste un limite intrinseco all'accuratezza delle osservazioni che possiamo compiere.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Il processo di misura perturba irreparabilmente ciò che stiamo misurando



E' possibile conoscere con precisione arbitraria la posizione di una particella

E' possibile conoscere con precisione arbitraria la sua quantità di moto



Non è possibile conoscere entrambe queste variabili con precisione qualsiasi

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

La meccanica quantistica : una teoria assiomatica basata su quattro principi ...

1927 János Lajos Neumann (allievo di Hilbert) sviluppa la formulazione assiomatica della meccanica quantistica:

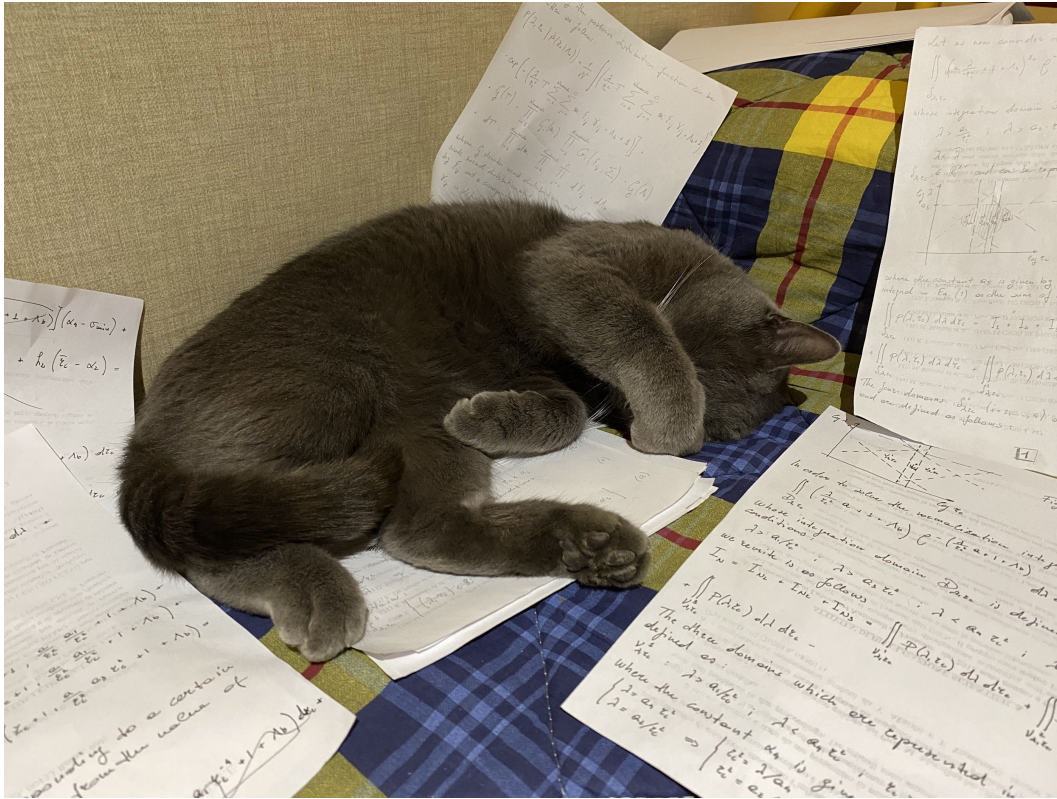
- le particelle sono descritte da **funzioni d'onda** $\psi(t)$.
- le particelle non hanno più traiettorie $r(t)$!!! ma la **funzione d'onda fornisce la probabilità** di trovare la particella in un certo punto.
- la **funzione d'onda evolve** nel tempo seguendo l'**equazione di Schrodinger** (deterministica):

$$H(t) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

- **principio di sovrapposizione e postulato della misura** - la particella esiste in una sovrapposizione di tutti gli stati possibili (con varie probabilità) fin quando non effettua la misura!!!



The Schrödinger cat and measurement paradox



- l'equazione di Schrodinger è deterministica (come la meccanica classica)

MA

- Il collasso della funzione d'onda è stocastico

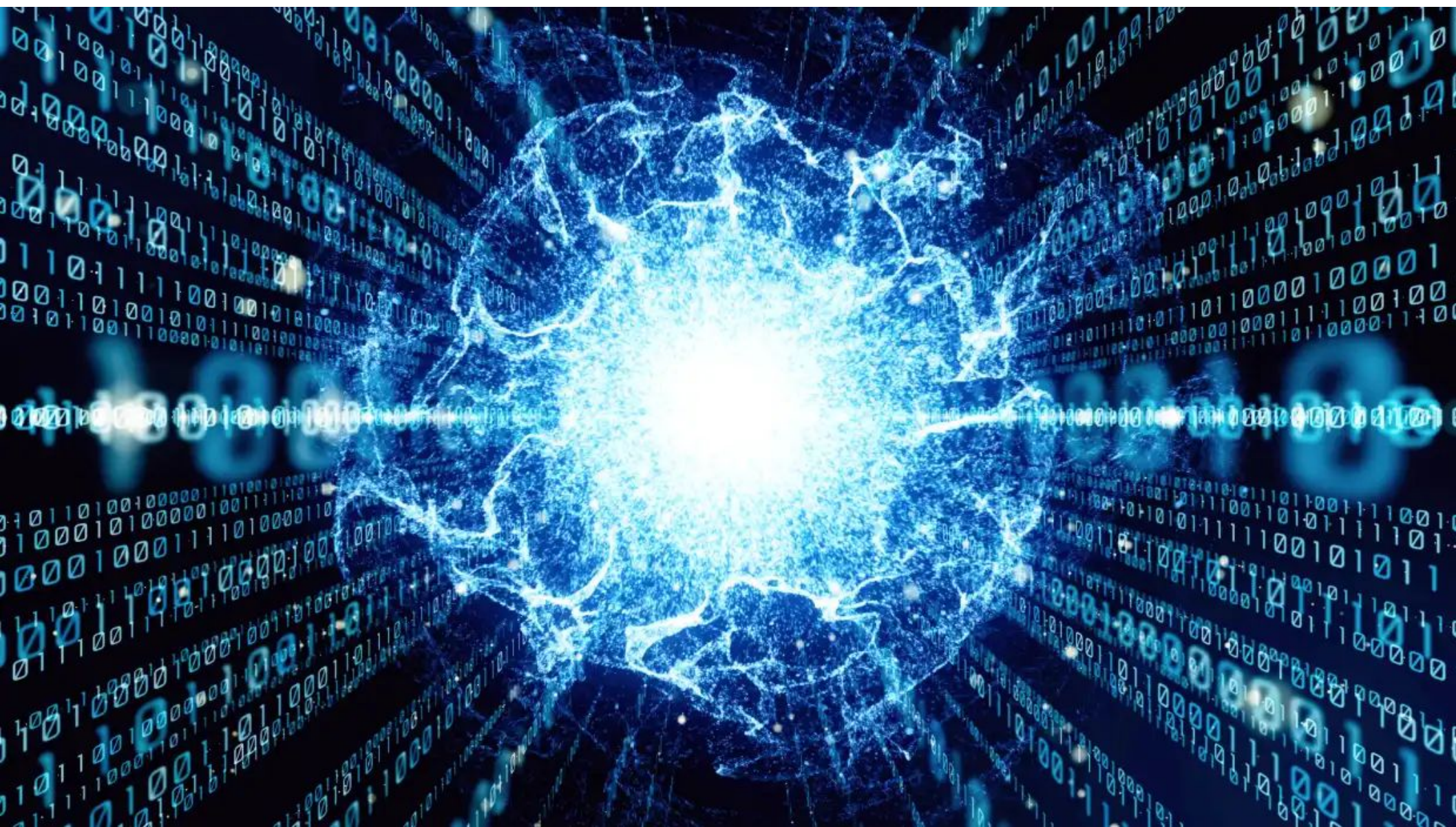


entanglement,

gli oggetti macroscopici dovrebbero trovarsi in sovrapposizione quantistica!

La teoria non dice quando un oggetto smette di comportarsi in modo microscopico (quantistico) e diventa macroscopico (classico)

computer quantistico



computer quantistico

“I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics” - Richard Feynman

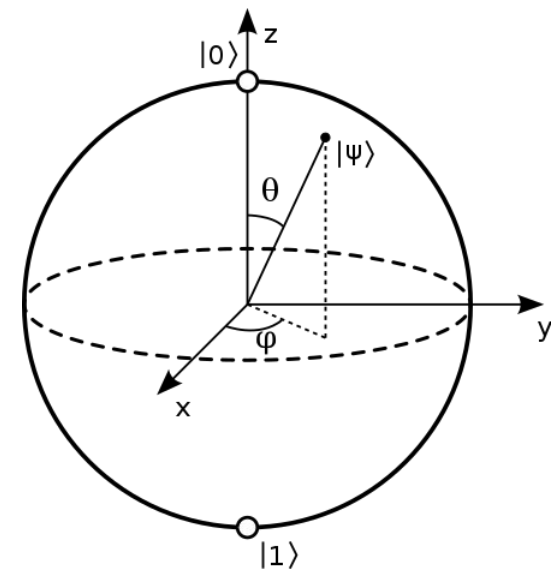
nonostante questo 100 anni di MQ ci hanno già portato nell'era dell'informazione: transistor, lasers, energia nucleare ... il computer quantistico

- **computer classico** - l'informazione è codificata in bit = 0,1
- **computer quantistico** - l'informazione è codificata in qbit = un sistema quantistico a due stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$

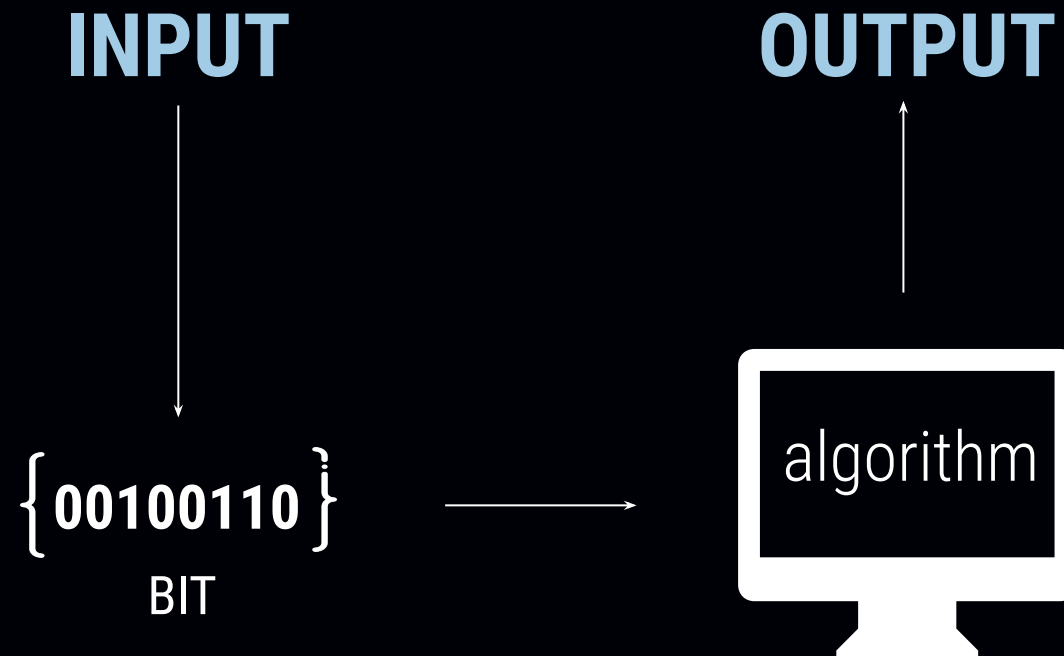
VANTAGGI: i vettori di base generano uno spazio vettoriale bidimensionale, il qbit vive in una combinazione lineare:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$



Come lavora un computer attuale







Come lavora un **computer** **quantistico**

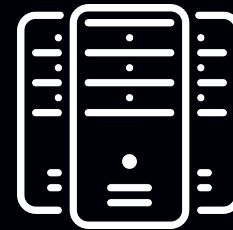
INPUT

$\begin{Bmatrix} 1010 \\ 0001 \\ 1100 \end{Bmatrix}$

QUBIT



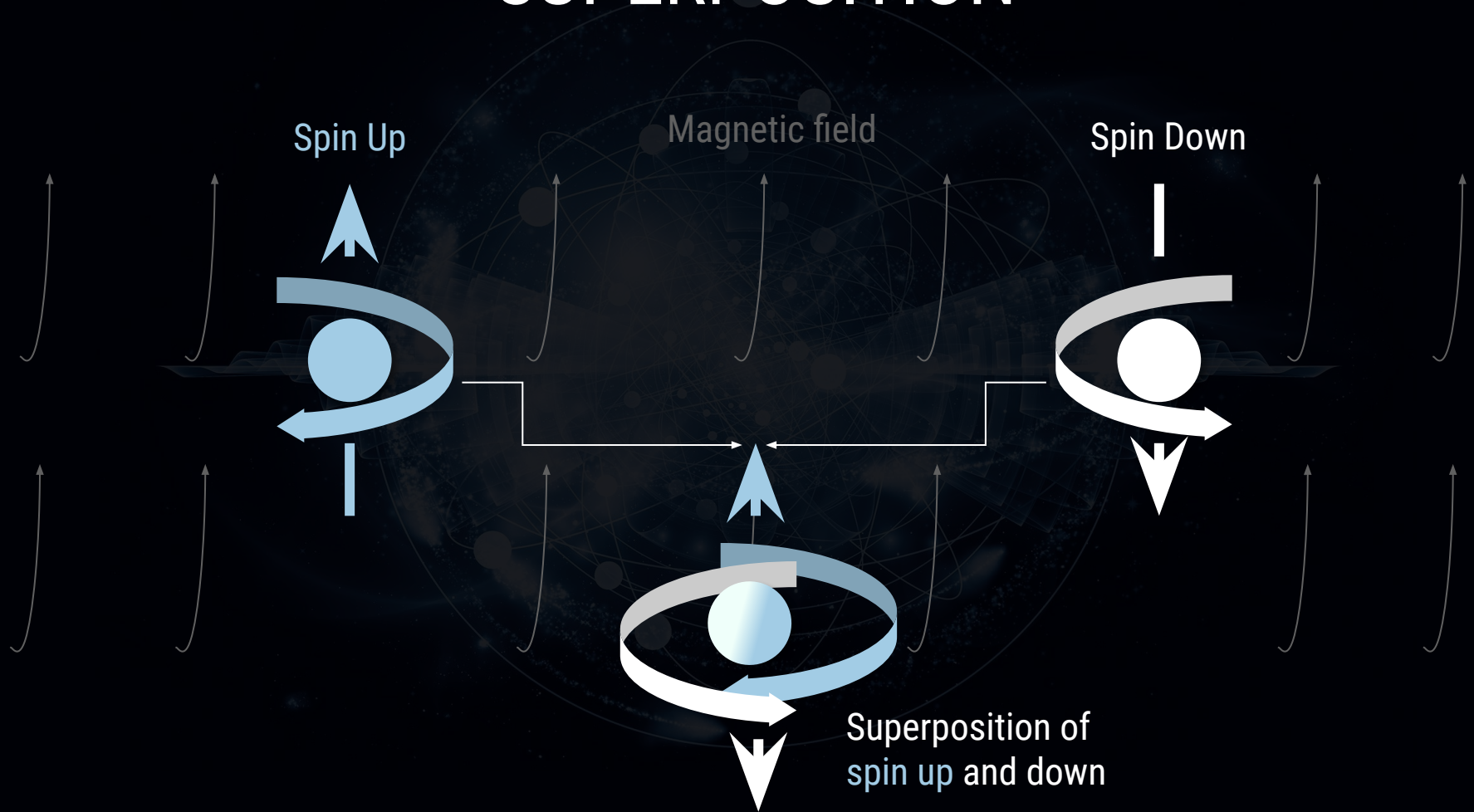
OUTPUT



quantic
algorithm



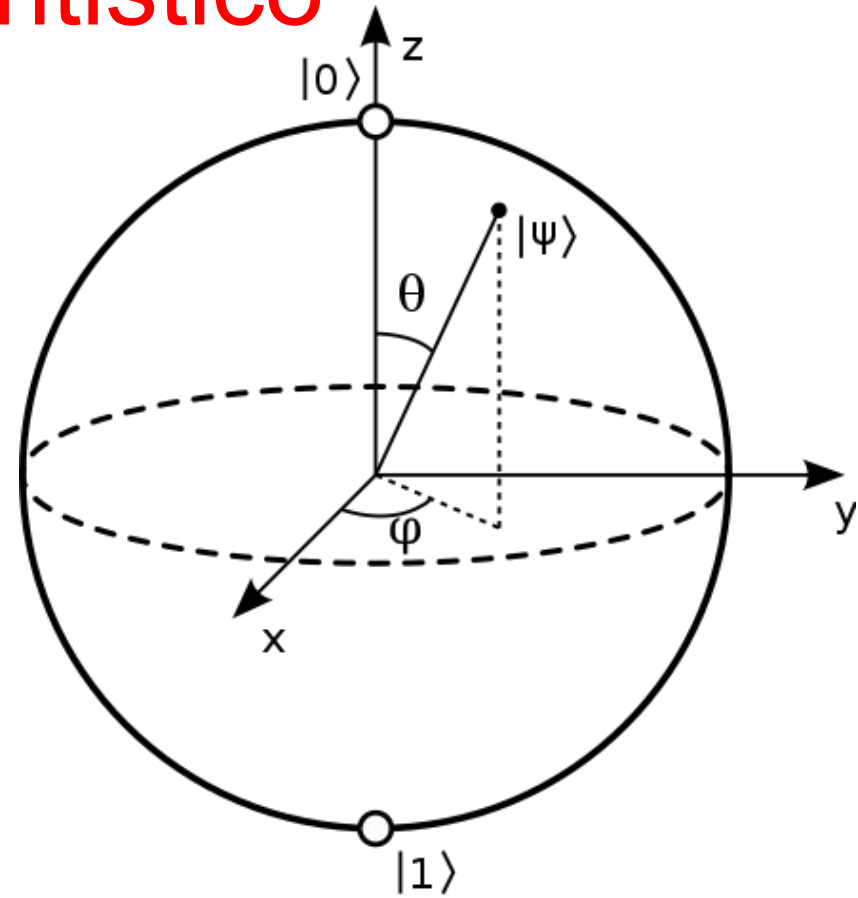
SUPERPOSITION



computer quantistico

un bit classico si può trovare solo al polo nord $|0\rangle$ opp. al polo sud $|1\rangle$

un qbit può essere rappresentato da un qualunque punto sulla sfera di Bloch !



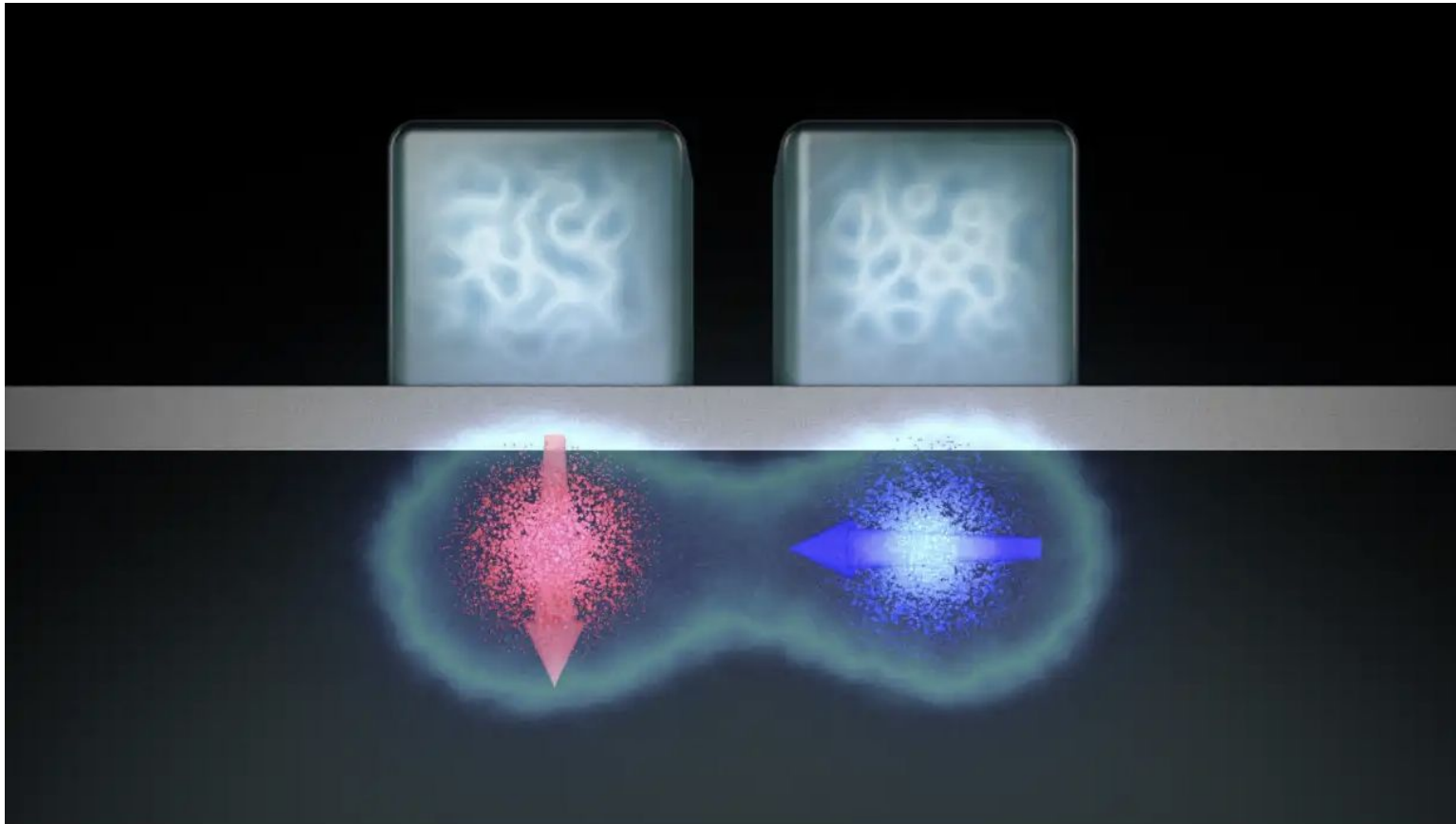
dati 2 qbit facendo il prodotto dei vettori di base ottengo uno spazio 4-D

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ and } |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

n qbit sono rappresentati da un vettore sovrapposizione in uno spazio 2^n -D

computer quantistico

Entanglement quantistico: se si ha un sistema di almeno due qbit questi possono essere correlati fra di loro, in maniera che lo stato quantistico di uno può essere determinato dallo stato quantistico dell'altro, indipendentemente dalla distanza fra i due qbit quando si effettua la misura.



An artist's impression of the two-qubit logic gate device developed at UNSW. Metal electrodes on the surface are used to manipulate the qubits, which interact to create an "entangled" quantum bit. **UNSW**

computer quantistico

Entanglement quantistico: se si ha un sistema di almeno due qbit questi possono essere correlati fra di loro, in maniera che lo stato quantistico di uno può essere determinato dallo stato quantistico dell'altro, indipendentemente dalla distanza fra i due qbit quando si effettua la misura.



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$$

In un computer quantistico l'entanglement è usato come moltiplicatore computazionale per qbits. Ponendo in entanglement più e più qbits, la capacità di calcolo del sistema cresce in maniera esponenziale.

Sfide tecniche verso il computer quantistico

Per realizzare praticamente un computer quantistico serve un sistema quantistico a due stati (opp. una combinazione di sistemi)

molte soluzioni sono in studio:

- fotoni - sfruttando i due stati di polarizzazione della luce (polarization encoding),
- elettroni - sfruttando i due stati di spin (, ) oppure il numero leptonico elettronico usando la carica,
- nuclei - sfruttando lo spin nucleare,
- ...

Ma non basta! Il sistema deve mantenere le sue proprietà quantistiche per un tempo sufficiente → il sistema deve essere isolato dal resto dell'Universo, l'interazione con l'ambiente rompe la coerenza quantistica (come nel processo di misura). Nella decoerenza l'informazione quantistica viene persa/trasferita all'ambiente.

Sfide teoriche al computer quantistico

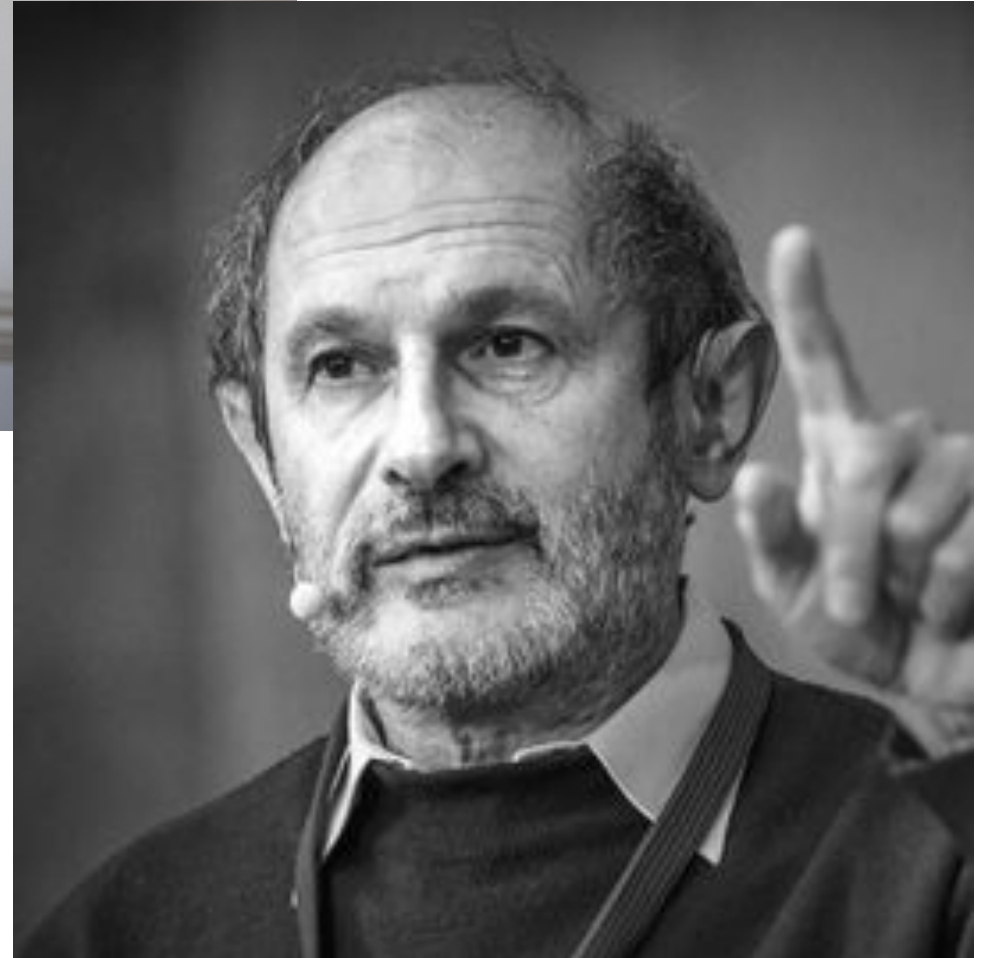
Anche perfettamente isolando un sistema quantistico, l'evoluzione lineare e deterministica dell'equazione di Shrodinger si manterrebbe per sempre, indipendentemente dalle sue dimensioni?

Secondo molti teorici no!! Anzi la *dimensione* del sistema quantistico indurrebbe il suo collasso:

Feynman in "*lectures on gravitation*" - il **principio di sovrapposizione è rotto alla scala macroscopica** → probabilmente **la gravità non può essere quantizzata**.
Infatti la **gravità è l'unica forza che sopravvive a scala macroscopica**.

Sir R. Penrose, L. Diosi - **Il principio di sovrapposizione è distrutto dall'interazione gravitazionale fra gli stati quantistici in sovrapposizione**.

Il collasso gravitazionale



Il collasso gravitazionale

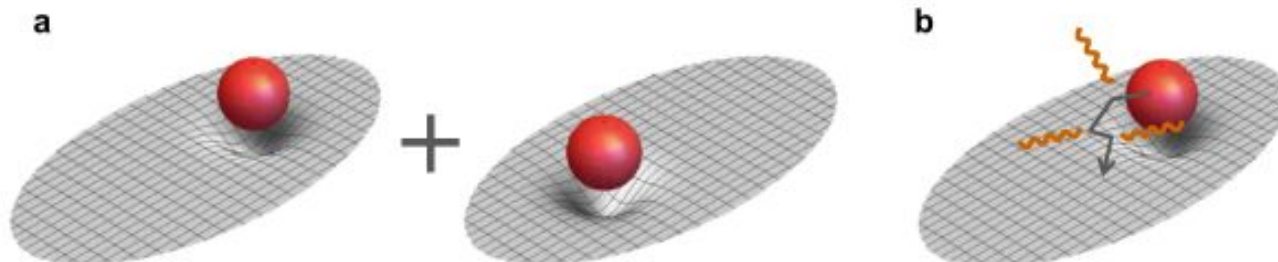
Penrose *“as soon as a ‘significant’ amount of space-time curvature is introduced, the rules of quantum linear superposition must fail”*.

Un sistema si trova in una sovrapposizione spaziale

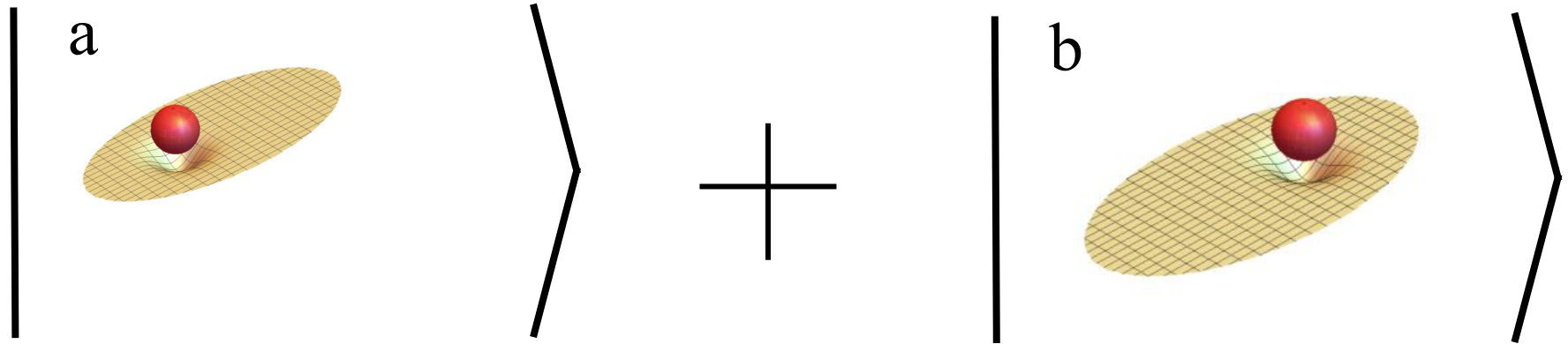
una corrispondente sovrapposizione di due spazi-tempi viene generata

la sovrapposizione è instabile e decade nel tempo

**maggiore è la massa del sistema, più grande è la differenza fra gli spazi-tempi,
più velocemente la funzione d’onda collassa**



Il collasso gravitazionale



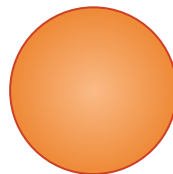
tempo di decadimento

$$\tau_{\text{DP}} = \frac{\hbar}{\Delta E_{\text{DP}}}$$

**energia gravitazionale
della sovrapposizione**



Proton: $m \approx 10^{-27}$ Kg, $R \approx 10^{-15}$ m
 $\tau_{\text{DP}} \approx 10^6$ years



Dust grain: $m \approx 10^{-12}$ Kg, $R \approx 10^{-5}$ m
 $\tau_{\text{DP}} \approx 10^{-8}$ s

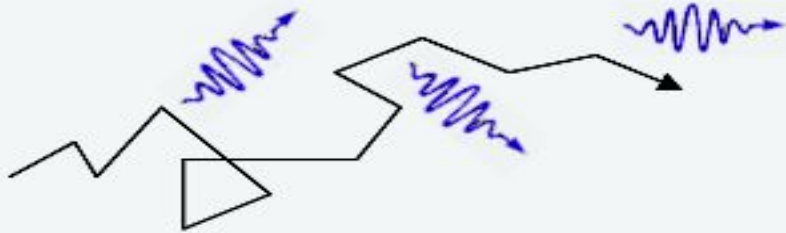
Il collasso gravitazionale verifica sperimentale

FREE PARTICLE

1. Quantum mechanics



2. Collapse models



Interagendo con il campo gravitazionale gravitazionale una particella carica viene accelerata e deve emettere una,

seppure piccolissima,

quantità di *radiazione spontanea*

Il collasso gravitazionale verifica sperimentale

Siamo andati alla ricerca di questa radiazione spontanea nel silenzio cosmico dei Laboratori Nazionali del Gran Sasso

- lo schermaggio della montagna corrisponde a 3100 m w.e.
- il flusso di raggi cosmici è ridotto di un fattore 10^6
- il rivelatore - 2 kg cristallo di Ge ultrapuro

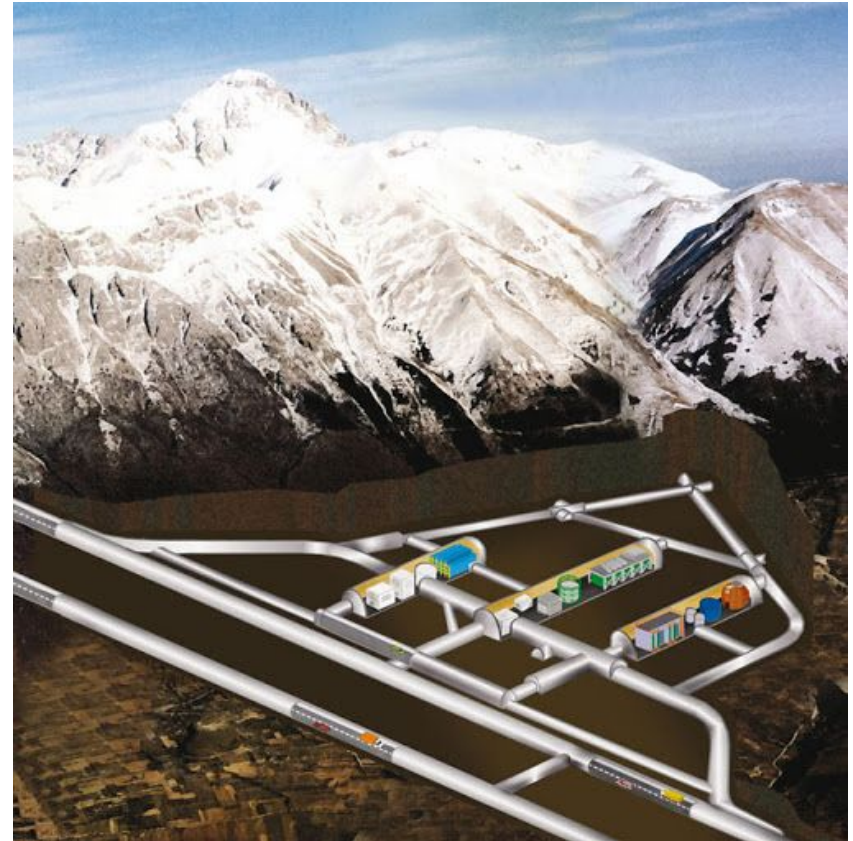
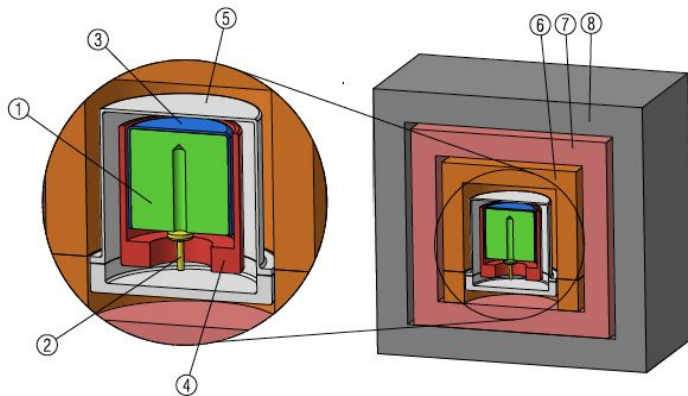
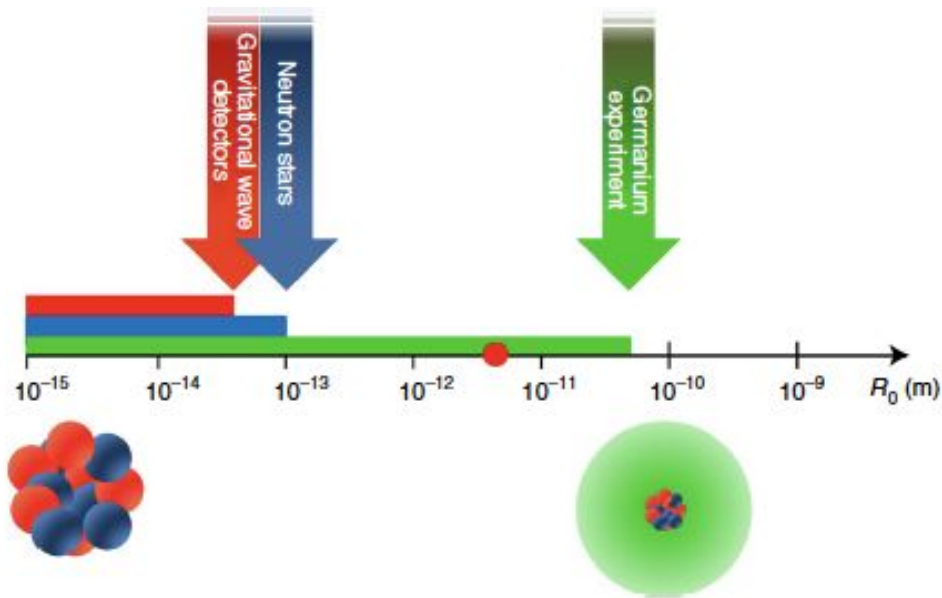


Figure 1: Schematic representation of the experimental setup: 1 - Ge crystal, 2 - Electric contact, 3 - Plastic insulator, 4 - Copper cup, 5 - Copper end-cup, 6 - Copper block and plate, 7 - Inner Copper shield, 8 - Lead shield.

Il collasso gravitazionale verifica sperimentale

Il segnale misurato è 1000 volte più piccolo di quanto predetto dalla teoria !



Il collasso gravitazionale per il momento
non funziona

il qbit non deve temere ancora limiti di
estensione.

Il processo conoscitivo prosegue senza sosta, Penrose già lavora ad un
modello senza radiazione spontanea ...

*“... to narrow down further the possibilities for the resolution of the
fundamental condrum facing the bringing together of the two great theories of
the 20th Century physics.”*



Grazie !

Rinserratevi nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio

, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi dei pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello che a goccia a goccia vadia versando del'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quegli animaletti volanti con pari velocità vadano verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto... Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre 'l vassello sta fermo non debbano succedere così,

fate muover la nave con quanta si voglia velocità, ché (purché il moto sia uniforme e non fluttuante...) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina oppure sta ferma..

***LE LEGGI DELLA FISICA SONO LE STESSA IN TUTTI I
RIFERIMENTI INERZIALI → SONO INVARIANTI PER
TRASFORMAZIONI DI GALILEO***

La meccanica classica è invariante per trasformazioni di Galileo

Infatti dalle trasformazioni di Galileo


$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

derivo una volta
rispetto al tempo ... $V_x' = V_x - V$

derivo di nuovo
rispetto al tempo ... $a_x' = a_x$

(perché $V = \text{cost}$)

quindi

$$F' = F$$

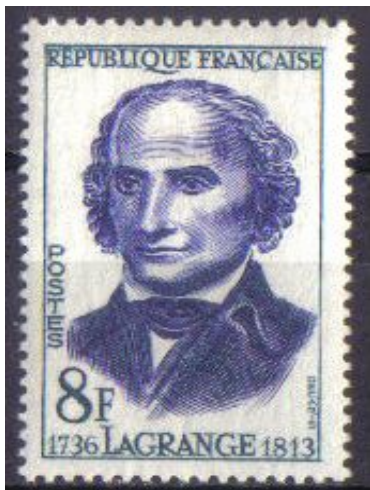
La meccanica classica : *uno spazio Euclideo permeato di forze che vive in un tempo assoluto*

Hamilton unifica gli studi di Lagrangia sulla meccanica analitica, di Eulero sull'energia potenziale e di Maupertuis sull'energia cinetica:

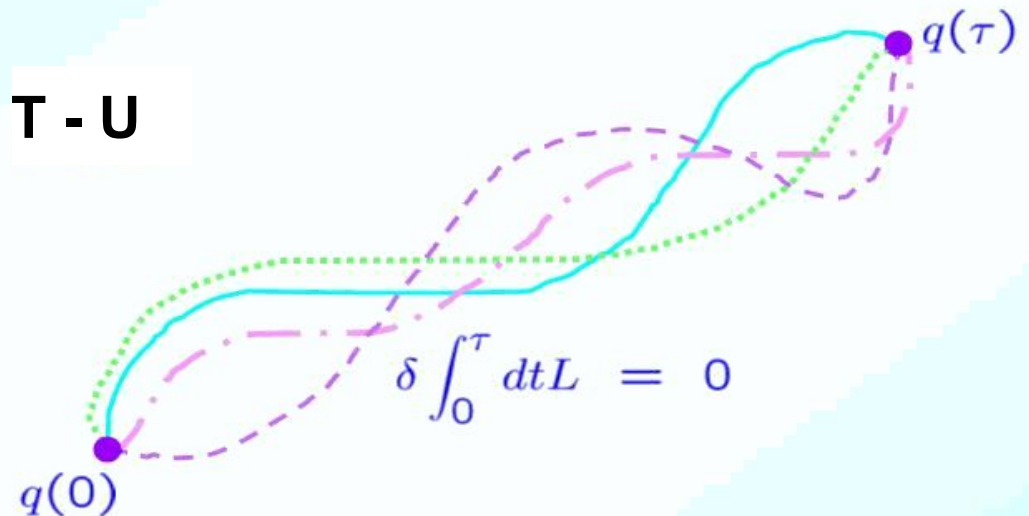
fra le infinite possibili, la traiettoria $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ seguita dalla particella è quella che rende minima l'azione:



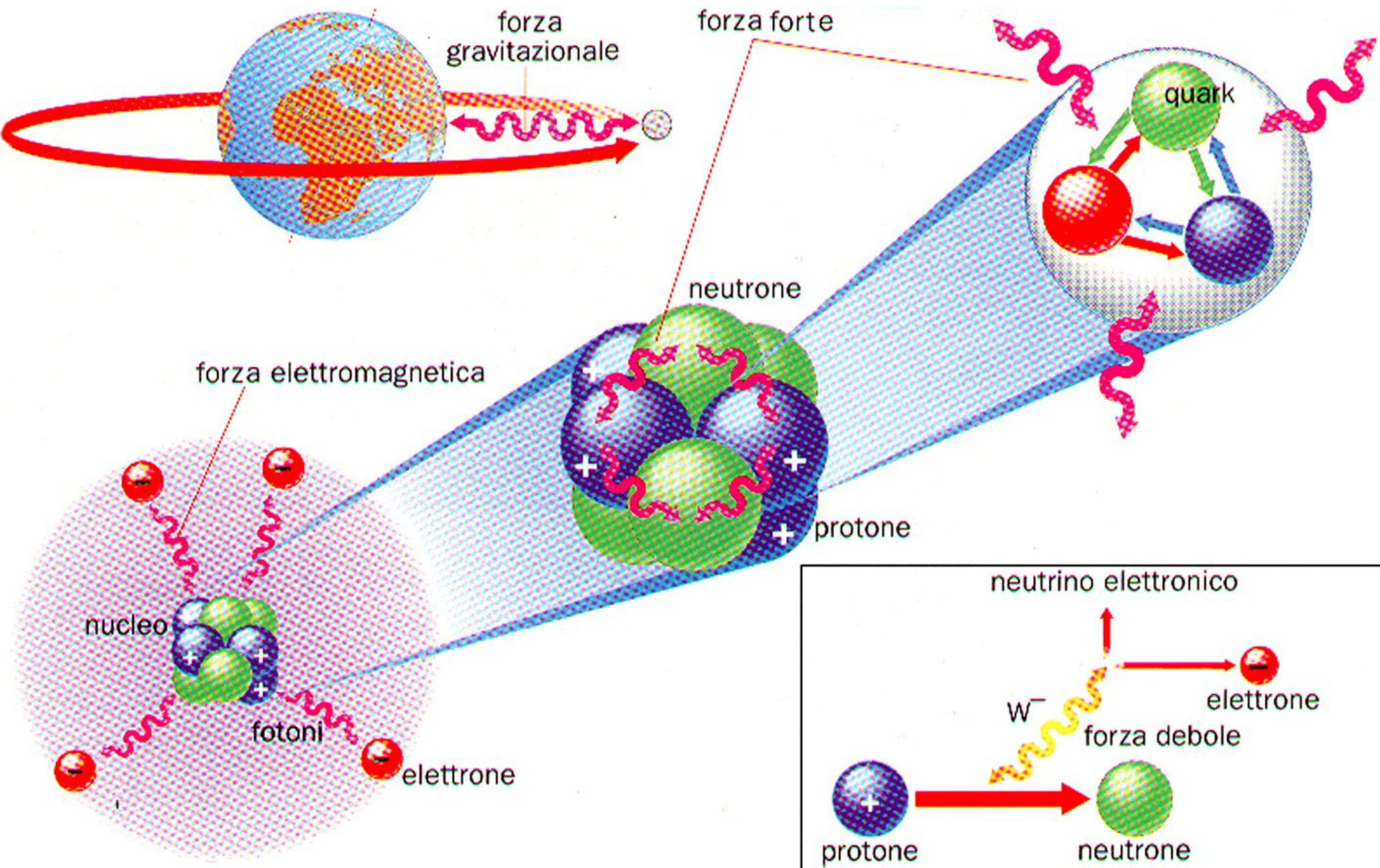
La Lagrangiana è la differenza dell'energia cinetica e di quella potenziale



$$L = T - U$$



LE FORZE DELLA NATURA

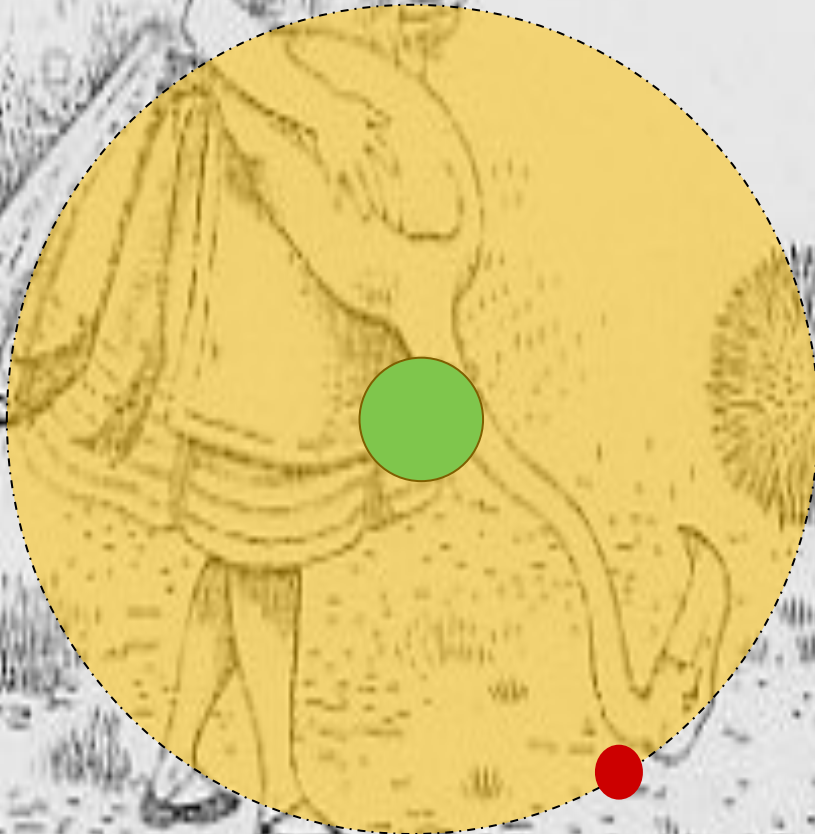


Il problema dell'atomo

Modello atomico di Rutherford
o modello planetario... va bene
così?

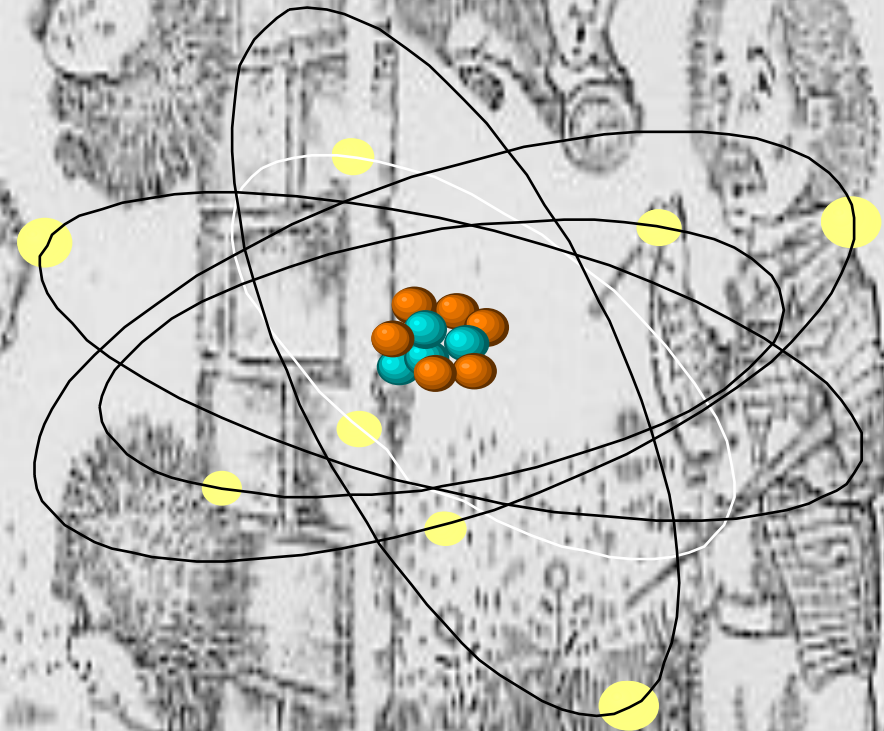
...un atomo così non dura più
di 10^{-8} sec!!!

...infatti carica che accelera
irraggia energia

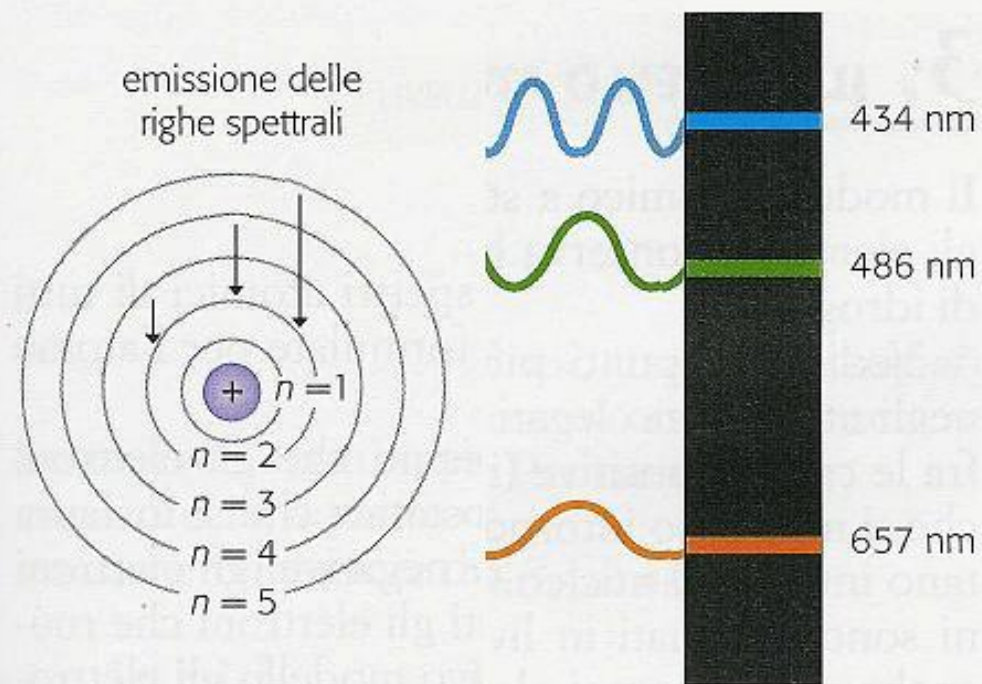
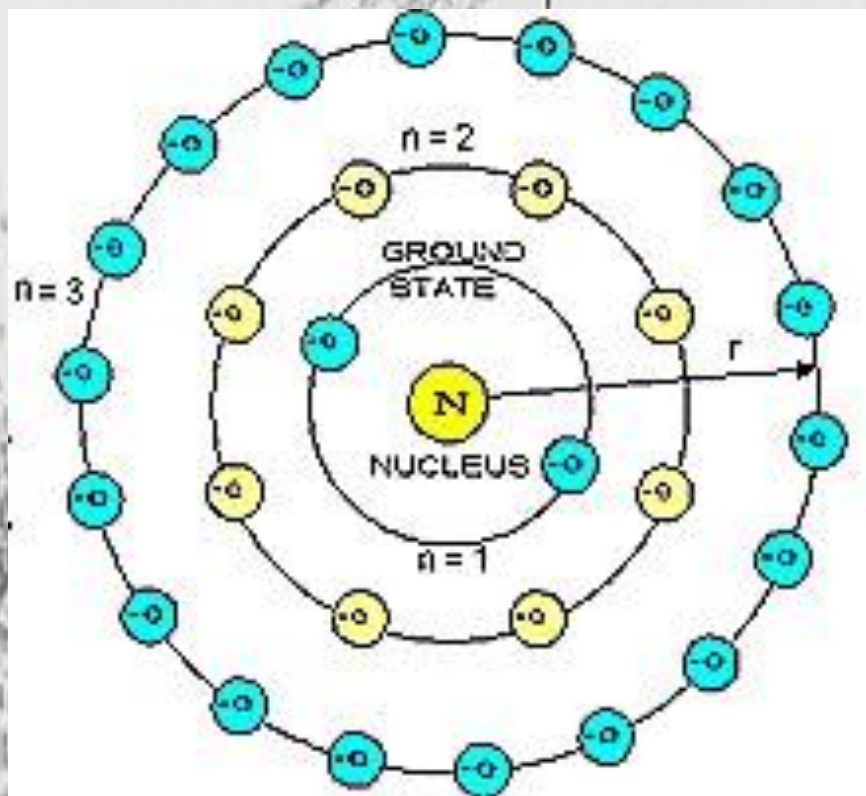


Il problema dell'atomo

- Qualunque orbita ellittica dovrebbe essere consentita
- Gli elettroni, essendo soggetti a un moto accelerato, dovrebbero irraggiare e cadere nel nucleo
- Lo spettro dell'irraggiamento dovrebbe essere continuo



Il modello di Bohr



$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = k_e \frac{e^2}{2a_0 h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$



Astrophysical origin of Dark Matter

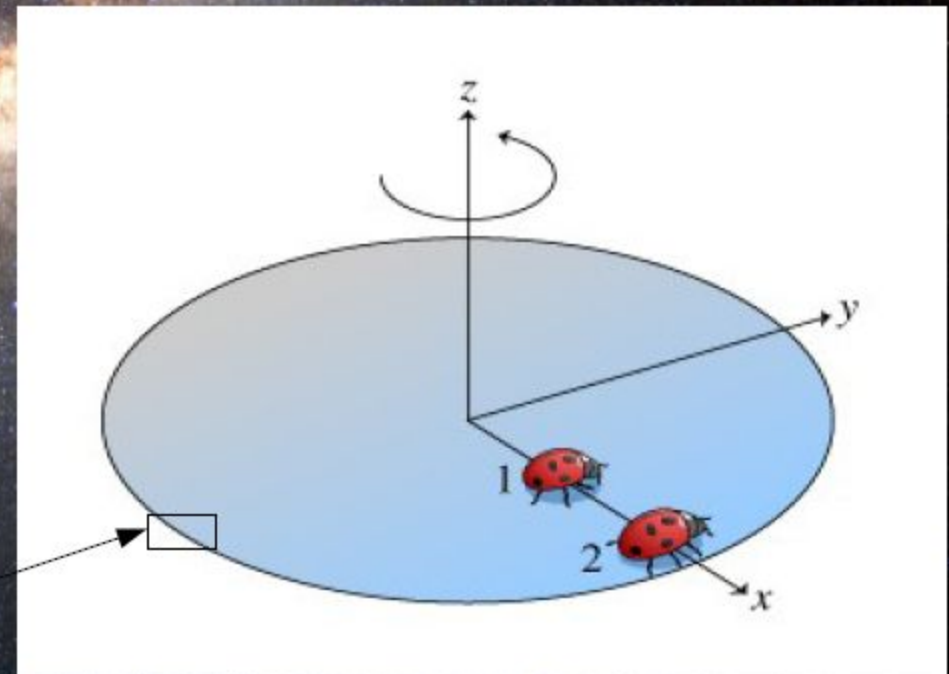
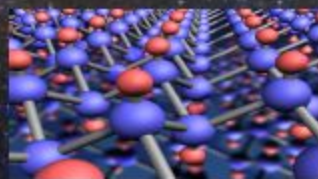
the curve of rotation of galaxies

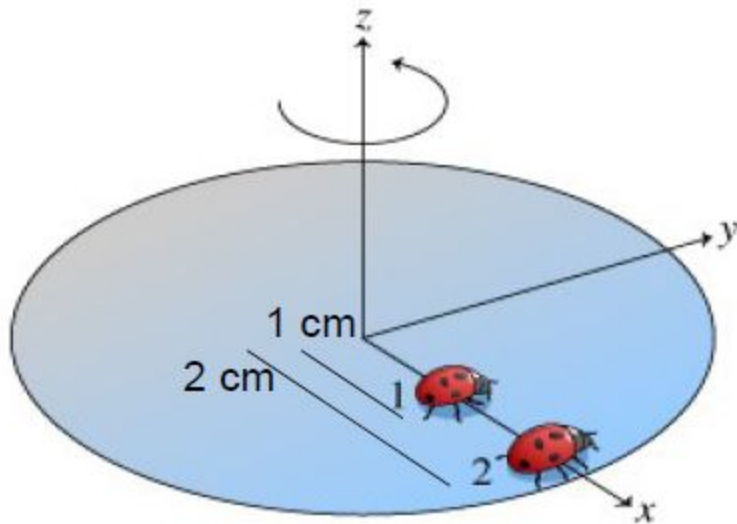


the disc rotates around the center, the velocity of the circular motion of stars depends on the distance from the center..

..but why?

let us consider a rigid disk (for example a CD) whose atoms mantain FIX positions in a cristal



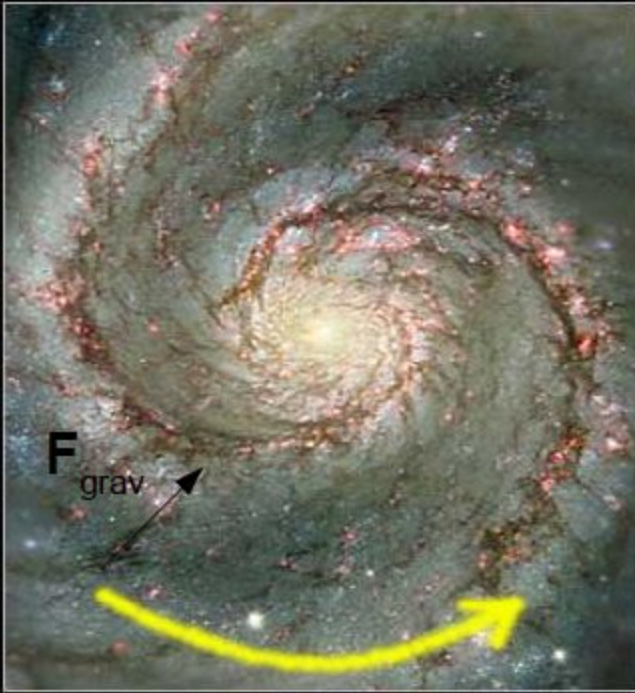


*Ladybug 1 covers $2\pi \times 1\text{cm} \approx 6\text{ cm}$
in a time t*

*Ladybug 2 covers $2\pi \times 2\text{cm} \approx 12\text{ cm}$
in the SAME TIME t*

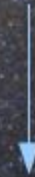
*velocity of ladybug 1 $v_1 = 6\text{cm}/t$
in a time t*

velocity of ladybug 2 $v_2 = 12\text{cm}/t = 2 \times v_1$



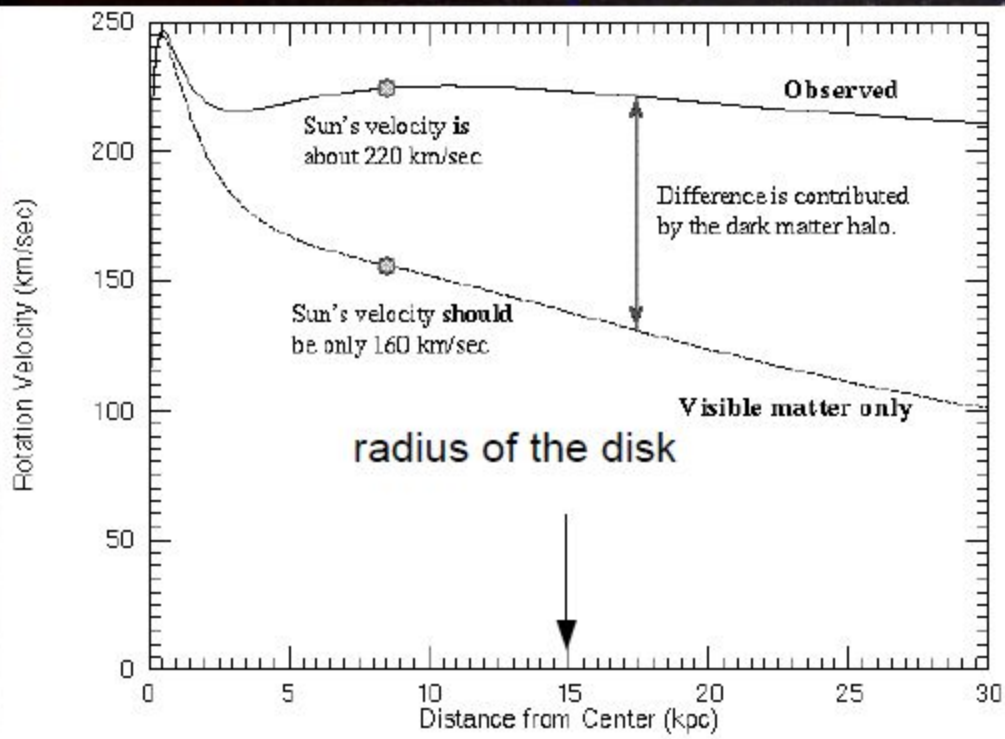
but the disk of the Galaxy is not rigid..

stars does not form a crystal they are held together by the mutual gravitational interaction!!



the velocity of a star at distance r from the center is caused by the gravitational force acting on the star:

$$v = \sqrt{(r F_{grav})}$$



The gravity of the visible matter in the Galaxy is not enough to explain the high orbital speeds of stars in the Galaxy. For example, the Sun is moving about 60 km/sec too fast. The part of the rotation curve contributed by the visible matter only is the bottom curve. The discrepancy between the two curves is evidence for a **dark matter halo**.

The velocity far away the center is TOO HIGH!!

the mass of the observed matter is not enough to explain the observed velocity



the Galaxy is surrounded by a spherical crown of matter which does not emit light: DARK MATTER

(small stars, planetoids or new exotic particles?)

Termodinamica : una teoria per sistemi con troppe incognite

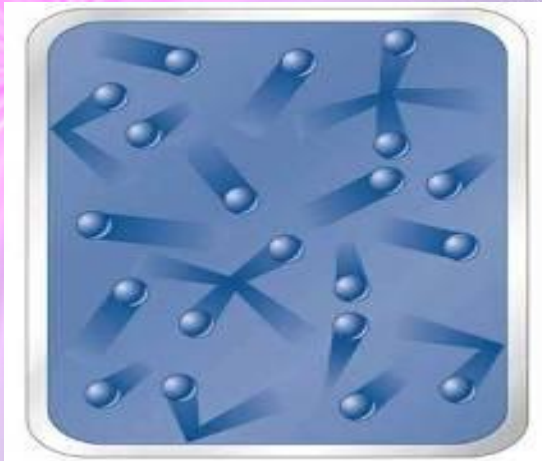
K-

Se devo descrivere (fare previsioni sull'evoluzione di un sistema) ed il numero di particelle interagenti del sistema è troppo grande .. dove grande significa $N > 3!!!$ la meccanica non mi è di grande aiuto :(

esempio: N particelle interagenti tramite gravità

- $N = 2 \rightarrow$ no problem
- $N = 3 \rightarrow$ una soluzione analitica (risolvere le equazioni del moto del sistema per ottenere $r_1(t)$ $r_2(t)$ $r_3(t)$) date le posizioni e le velocità dei tre corpi all'istante iniziale, è possibile solo per casi particolari:
 - 1) la massa di uno dei tre corpi è trascurabile
 - 2) due corpi orbitano circolarmente o ellitticamente attorno ad un corpo centrale (Lagrangia Poincaré ...)
- **$N > 3$ non esistono soluzioni analitiche -.-**
computer (soluzioni numeriche), oppure teoria delle perturbazioni.
Il risultato è affidabile entro un certo tempo, poi si allontana imprevedibilmente dalla realtà \rightarrow *sistema deterministico caotico*

Termodinamica : una teoria per sistemi con troppe incognite



Una ampolla di gas contiene un numero di Avogadro di particelle

$$N \sim 6 \times 10^{23} \text{ particelle !!!}$$

fare previsioni sulle traiettorie e le velocità delle particelle è impensabile!

Ricetta:

- 1) Si tratta il sistema come una porzione separata dal resto dell'universo
- 2) fra una trasformazione (scambio di energia di qualche tipo) e l'altra il sistema viene considerato in equilibrio
- 3) si considerano le evoluzioni nel tempo di grandezze *macroscopiche*, che rappresentano la media su tutte le particelle del sistema delle loro proprietà:

energia totale media – **E** / numero di particelle – **N** / temperatura – **T**
pressione – **P** / volume – **V** / entropia – **S**

Termodinamica : una teoria per sistemi con troppe incognite

K-

- 1) Si tratta il sistema come una porzione separata dal resto dell'universo
- 2) fra una trasformazione (scambio di energia di qualche tipo) e l'altra il sistema viene considerato in equilibrio
- 3) si considerano le evoluzioni nel tempo di grandezze *macroscopiche*, che rappresentano la media su tutte le particelle del sistema delle loro proprietà:

energia totale media – **E** / numero di particelle – **N** / temperatura – **T**
pressione – **P** / volume – **V** / entropia – **S**

Le equazioni della teoria legano le grandezze macroscopiche:

$$dE = \delta Q - \delta L \quad \text{primo principio (conservazione dell'energia)}$$

Scambio di calore $T dS$

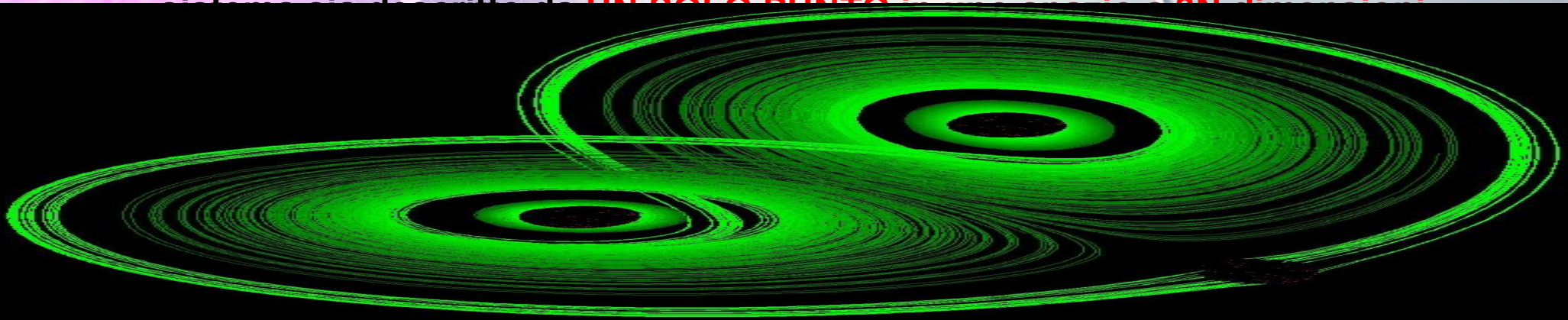
Lavoro meccanico $P dV$

$$P V = N k T \quad \text{equazione di stato dei gas perfetti}$$

Termodinamica e meccanica c'è un legame?

K^-

1) invece di considerare N particelle e le loro $3N$ coordinate incognite, immagino che il



2) il moto del punto in questo spazio (spazio delle fasi) è governato dalle leggi della meccanica

3) le proprietà di equilibrio macroscopico del sistema corrispondono a valori medi delle quantità microscopiche delle particelle utilizzando come peso la **distribuzione di probabilità** $\rho(r_1, r_2, \dots, r_N)$ del sistema in questo spazio

4) POSTULATO: un sistema isolato in equilibrio non ha preferenze per nessuno dei possibili microstati che può assumere \rightarrow quindi lo **stato termodinamico più probabile è quello che risulta dal maggior numero di microstati**

numero di microstati

$$S = k \ln(\Omega) = -k \left[\sum_{\text{sui microstati}} \rho \ln(\rho) \right] \text{ L'entropia deve essere massima !!!}$$

Termodinamica e meccanica c'è un legame?

K^-

$S = k \ln(\Omega) = -k \left[\sum_{\text{sui microstati}} \rho \ln(\rho) \right]$ Lo stato macroscopico di equilibrio è quello che rende massima l'entropia

Da cui si ottiene la distribuzione di probabilità ρ

Facendo la media su ρ posso ottenere le grandezze macroscopiche del sistema, es. la temperatura:

$$\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{3}{2} N k T$$

La temperatura è una misura della velocità media delle particelle

E tutte le leggi empiriche della termodinamica! $dE = \delta Q - \delta L \dots$

La termodinamica segue dalle leggi della meccanica, e dall'uguale probabilità a priori