CENTRO FERMI
MUSEO STORICO DELLA FISICA E CENTRO STUDI E RICERCHE ENRICO FERMI

Extreme Energy Events
Science Inside Schools

10° Conferenza dei Progetti del Centro Fermi

Progetto EEE

La Scienza nel cuore dei giovani

Torino, 6-8 Marzo 2019

# Analisi Statistica dei Dati Sperimentali

M. Trimarchi e P. La Rocca

# Misura delle Grandezze Fisiche

- **Misure dirette**
  - **Confronto con un campione dell'unità di misura**
    - **Lunghezze →Metro**

- **Misure indirette**
  - **Operazioni matematiche su misure di altre grandezze**
    - **Velocità → v= s/t**

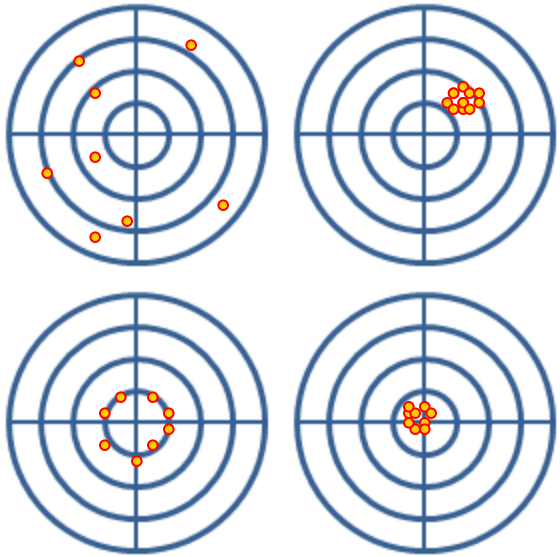
- **Strumenti di misura tarati**
  - **I valori corrispondono direttamente al valore della grandezza misurata**
    - **Posizione di un indice su una scala graduata, numero su un display**

# Strumenti tarati - Caratteristiche

- **Sensibilità**
  - La minima variazione apprezzabile
    - Strumenti graduati →il più piccolo intervallo in cui è divisa la scala
- **Soglia**
  - Minimo valore misurabile
    - Termometro a mercurio → 34° C
- **Portata**
  - Massimo valore misurabile
    - Sensibilità x Numero di divisioni
- **Intervallo di funzionamento**
  - Intervallo dei valori misurabili
    - Soglia - Portata
- **Prontezza**
  - Tempo necessario perché l'indicazione dello strumento si stabilizzi
    - Grandezze che variano su tempi piccoli
      - richiesta la massima prontezza!

# Strumenti tarati - Caratteristiche

- **Accuratezza**
  - Capacità di fornire valori vicini al valore vero
- **Precisione**
  - Riproducibilità dei risultati
    - Ripetendo più volte la stessa misura ottengo risultati simili?
      - E' data dall'errore di sensibilità dello strumento, ed è influenzata dagli errori casuali



- Misure non precise e non accurate
- Misure precise ma non accurate
- Misure non precise ma accurate
- Misure precise e accurate

# Errori di misura

- **Errori sistematici**
  - Difetti dello strumento
    - Difetti di costruzione o deterioramento
  - Uso dello strumento in condizioni errate
  - Errori dello sperimentatore
    - Errore di parallasse
  - Perturbazioni esterne
    - Polvere tra le ganasce di un calibro
  - Perturbazioni indotte dallo sperimentatore
    - Compressione involontaria della ganasce del calibro

- **Agiscono sempre nello stesso verso (sottostima o sovrastima)**
- **Come scoprirli?**
  - Analisi critica dello strumento e del metodo
  - Misura della stessa grandezza con un altro strumento/metodo
    - Una volta scoperti, possono essere ridotti o eliminati

# Errori di misura

- Errori casuali
  - Attriti e giochi meccanici dello strumento
  - Condizioni ambientali variabili
    - Sbalzi termici
  - Comportamento dello sperimentatore
    - Variazione del tempo di reazione da un soggetto all'altro
      - O dello stesso soggetto in diverse circostanze
- Agiscono in entrambi i versi (sovrastima o sottostima)
- Come scoprirli?
  - Misure ripetute con strumenti sensibili
    - Possono essere ridotti, ma non eliminati
      - Possiedono proprietà statistiche: possono essere stimati

# Errore assoluto

- L'errore Assoluto è la differenza tra il valore misurato e il valore vero
  - Ci dà una stima di quanto i dati raccolti si discostano dal valore vero
    - Quindi ogni misura si indica
      - Misura = Valore misurato ± Errore assoluto
- Quanto più piccolo è l'errore assoluto
  - Tanto più precisa sarà la nostra misura
- Lo si può calcolare solo se si conosce il valore vero
- Se non conosciamo il valore vero
  - Pochi dati
    - Semidispersione massima
      - D = (Valore massimo misurato – valore minimo misurato)/2
  - Molti dati
    - Deviazione standard (vedere più avanti)
- L'errore assoluto ha la stessa unità di misura della grandezza misurata

# Errore relativo

- L'errore assoluto stima l'intervallo entro il quale ci aspettiamo di trovare il valore vero, ma non basta:
  - Errore assoluto di un cm
    - Se la lunghezza misurata è 1 metro → buona precisione
    - Se la lunghezza misurata è 10 cm → scarsa precisione
- Per valutare la qualità della misura eseguita serve l'errore relativo
  - Che rappresenta quindi la precisione della misura
- E' il rapporto fra l'errore assoluto e la media delle misure effettuate
  - Errore relativo = Errore assoluto / valor medio delle misure
- Moltiplicandolo per 100 otteniamo l'errore relativo percentuale
  - Sono entrambi rapporti fra grandezze omogenee, quindi non hanno unità di misura

# Cifre Significative

- **Il risultato di una misura deve fornire:**
  - **Il valore numerico della grandezza misurata**
  - **L'incertezza della misura, almeno pari alla sensibilità**
  - **L'unità di misura**

$$l = (14,7 \pm 0,1)\ cm$$

- **Alcune cifre del valore misurato sono certe**
  - **non risentono dell'incertezza della misura**
    - **La cifra delle decine (1) e quella delle unità (4) sono certe**
- **Altre possono oscillare in un certo intervallo**
  - **a seconda dell'errore corrispondente**
    - **La prima cifra decimale è incerta, perché può variare tra 6 e 8**
- **Cifre Significative**
  - **Numero minimo di cifre che ci permettono di esprimere un risultato con la relativa precisione**
    - **Tutte le cifre certe e la prima cifra incerta**

# Cifre Significative

- **Come comportarci con gli zeri?**
  - **Se sono compresi tra altri numeri, sono cifre significative**
    - **26008 → 5 cifre significative**
  - **Se stanno all'inizio di un numero, non sono cifre significative:**
    - **0,00658 → 3 cifre significative**
  - **Se stanno alla fine di un numero, dobbiamo cercare la virgola:**
    - **Se è presente la virgola**
      - **120,0 → tutti gli zeri sono cifre significative**
    - **Se la virgola è assente**
      - **1200 → bisogna capire!**
        - » **1200 ± 100; 1200 ±10; 1200 ±1**

- **Usiamo la notazione scientifica:**
  - **se l'ultima cifra cui si dà significato è quella dei decimi (1200,0) → $1{,}2000 \cdot 10^3$**
  - **se l'ultima cifra cui si dà significato è quella delle unità (1200) → $1{,}200 \cdot 10^3$**
  - **se l'ultima cifra cui si dà significato è quella delle decine (1200) → $1{,}20 \cdot 10^3$**
  - **se l'ultima cifra cui si dà significato è quella delle centinaia (1200) → $1{,}2 \cdot 10^3$**

# Arrotondamenti

- Se il valore numerico di una grandezza contiene un numero di cifre superiore alle cifre significative
  - va arrotondato per eccesso o per difetto.
- L'arrotondamento si fa alla fine dei calcoli
  - altrimenti gli effetti dell'arrotondamento si accumulano, pregiudicando la precisione del risultato finale
- Criteri di arrotondamento
  - Se la cifra da eliminare è <5
    - L'ultima cifra significativa resta invariata
      - 12,73 → 12,7
  - Se la cifra da eliminare è >5
    - L'ultima cifra significativa aumenta di uno
      - 12,76 → 12,8
  - Se la cifra da eliminare è =5
    - Si arrotonda al numero pari più vicino
      - 12,45 → 12,4
      - 12,75 → 12,8

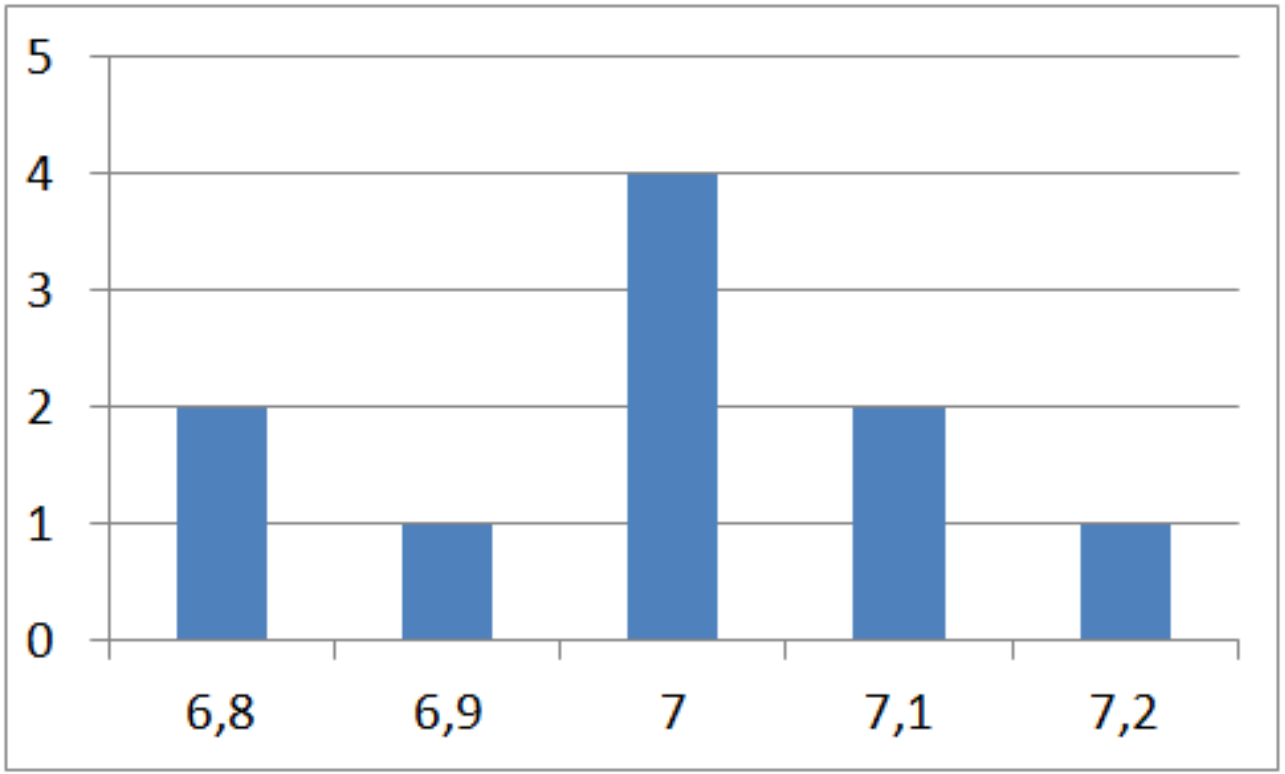
# Cifre significative nelle operazioni matematiche

- E' il termine col minor numero di cifre significative che determina il risultato
  - Il risultato non può avere un'incertezza minore del valore più incerto
- Somme e sottrazioni
  - Il risultato è determinato dall'addendo con incertezza maggiore
    - 175,24 + 154,7 = 329,94 → 329,9
- Moltiplicazioni e divisioni
  - Il risultato ha un numero di cifre significative pari a quelle del dato che ne ha di meno:
    - 345 : 8,2 = 42,07317 → 42
- Logaritmo
  - Ha tante cifre decimali quante sono le cifre significative dell'argomento:
    - ln 5,46 = 1,69745 → 1,697

# Elaborazione dei dati

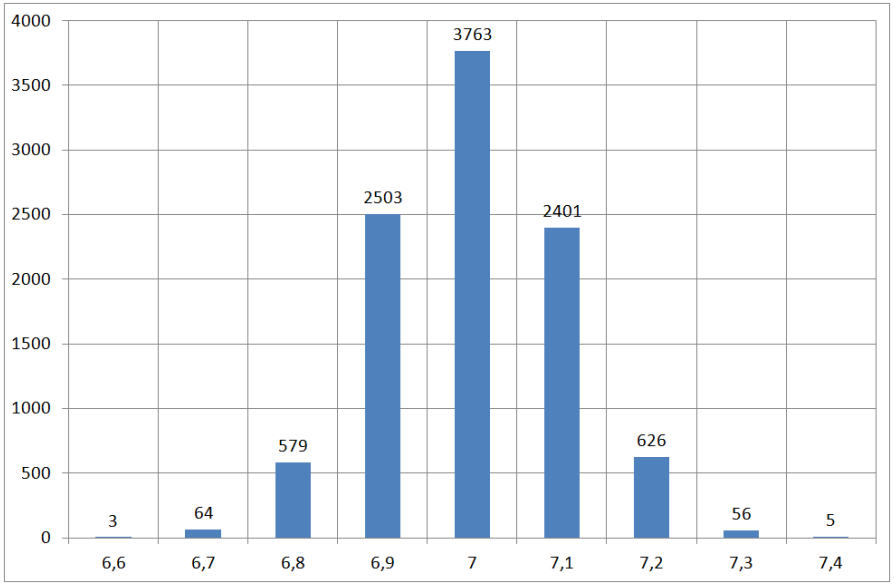
| Numero misura | Valore trovato |
|---|---|
| 1 | 7,1 |
| 2 | 7,0 |
| 3 | 6,8 |
| 4 | 6,9 |
| 5 | 7,2 |
| 6 | 7,0 |
| 7 | 7,0 |
| 8 | 7,1 |
| 9 | 7,0 |
| 10 | 6,8 |

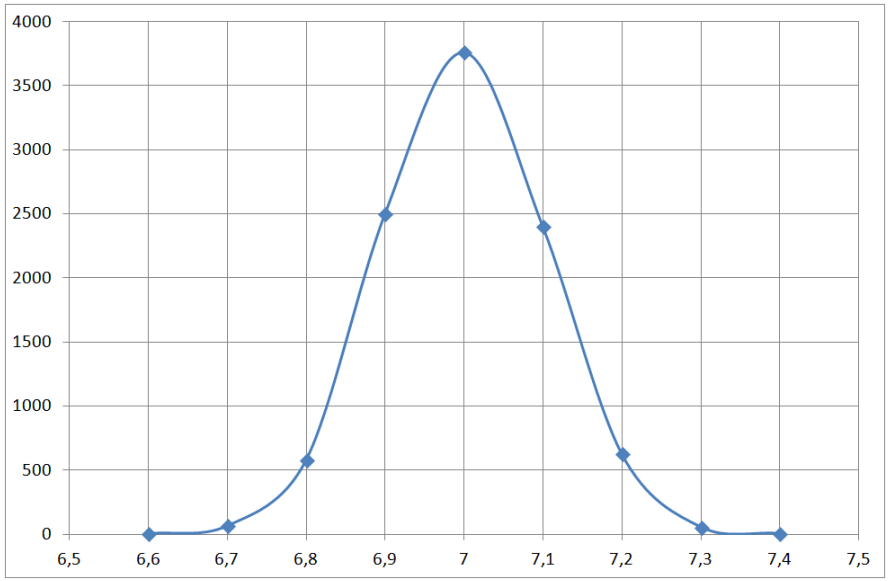
- **Istogramma**
  - Rappresentiamo la frequenza con cui un certo valore si presenta
  - In ascissa il valore misurato
  - In ordinata il numero di volte che lo abbiamo ottenuto



# Legge dei grandi numeri

- All'aumentare del numero di misure, il risultato più frequente è anche il più probabile
- Gli errori casuali hanno uguale probabilità di verificarsi
  - Sia in eccesso, sia in difetto rispetto al valore vero
- Se il numero di misure è elevato, ci aspettiamo che il valore più frequente sia anche il valore più probabile
  - Ci aspettiamo che i valori misurati si distribuiscano simmetricamente rispetto al valore vero



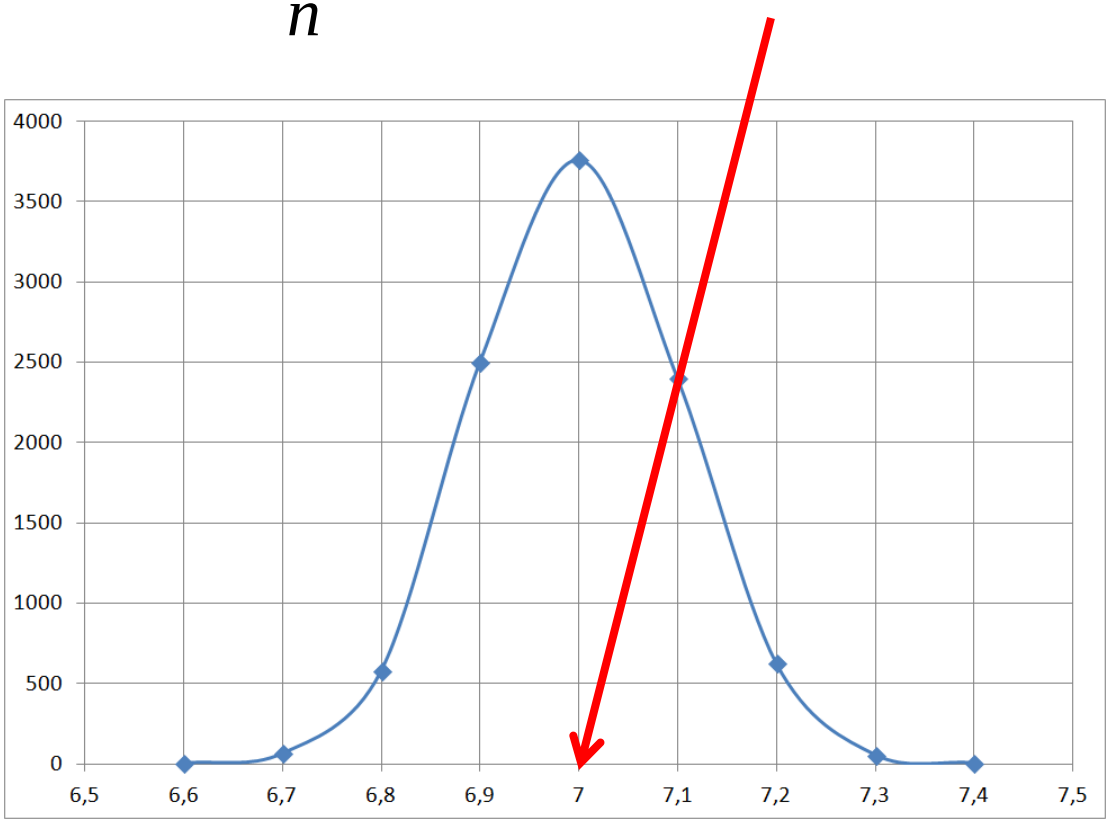



# Indici di Tendenza

- **Media aritmetica**
  - **Somma dei valori osservati, divisa per il numero di osservazioni**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

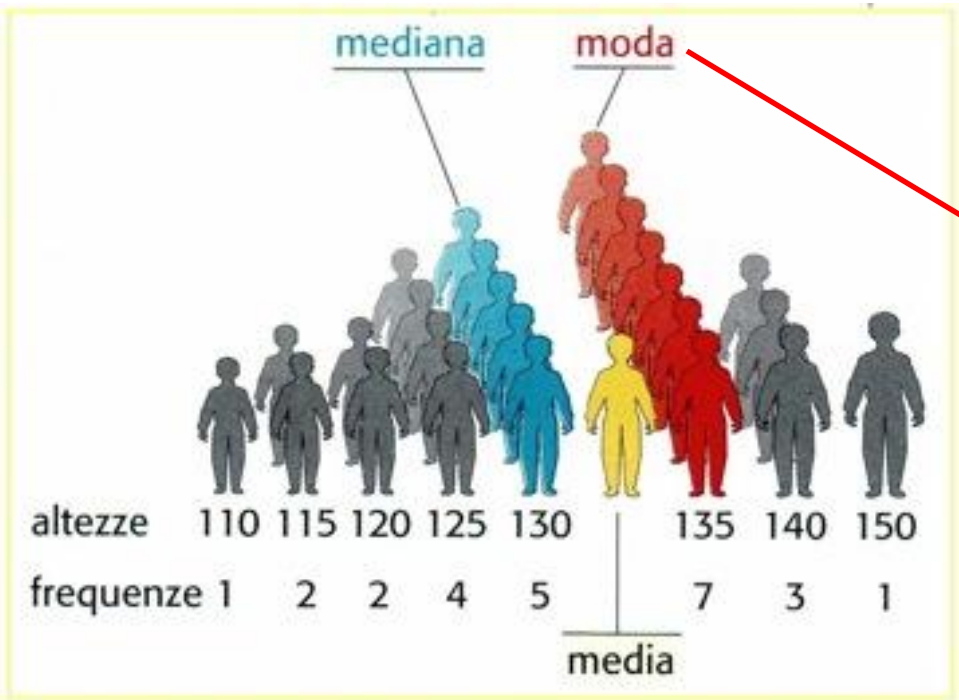
| Media |
|---|
| 7 |




| Valore misurato | Frequenza |
|---|---|
| 6.6 | 3 |
| 6.7 | 64 |
| 6.8 | 579 |
| 6.9 | 2503 |
| 7 | 3763 |
| 7.1 | 2401 |
| 7.2 | 626 |
| 7.3 | 56 |
| 7.4 | 5 |
| Totale | 10000 |

# Indici di Tendenza

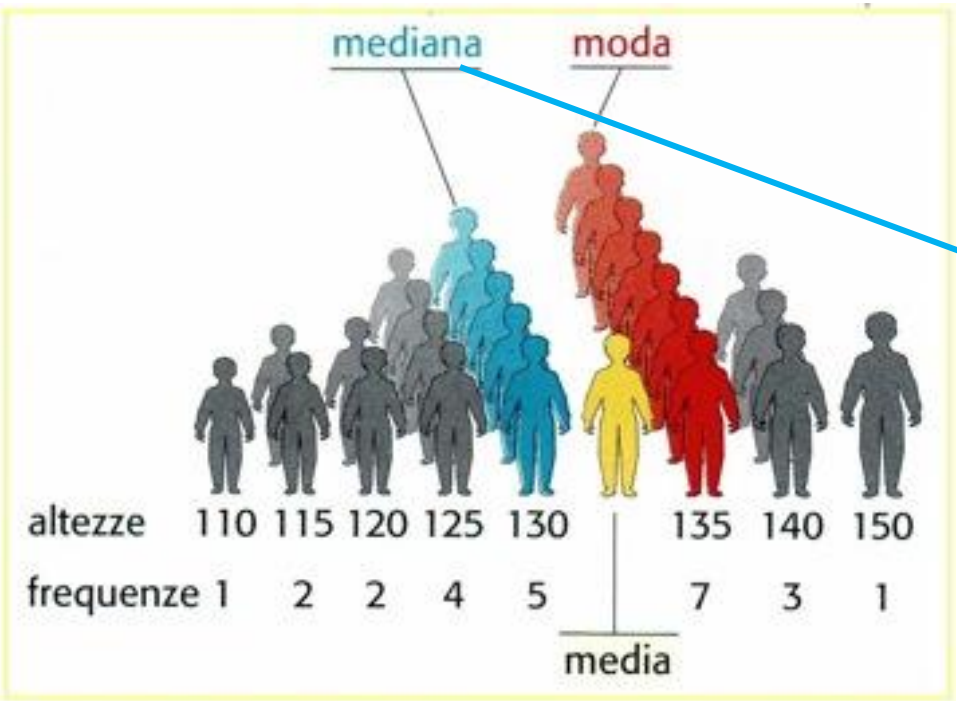
- **Moda**
  - **La modalità più frequente**




| Valore misurato | Frequenza |
|---|---|
| 6.6 | 3 |
| 6.7 | 64 |
| 6.8 | 579 |
| 6.9 | 2503 |
| 7 | 3763 |
| 7.1 | 2401 |
| 7.2 | 626 |
| 7.3 | 56 |
| 7.4 | 5 |
| Totale | 10000 |

# Indici di Tendenza

- **Mediana**
  - **Valore che occupa la posizione centrale nella distribuzione, tale che:**
    - **Metà delle osservazioni sono uguali o minori**
    - **Metà delle osservazioni sono uguali o maggiori**



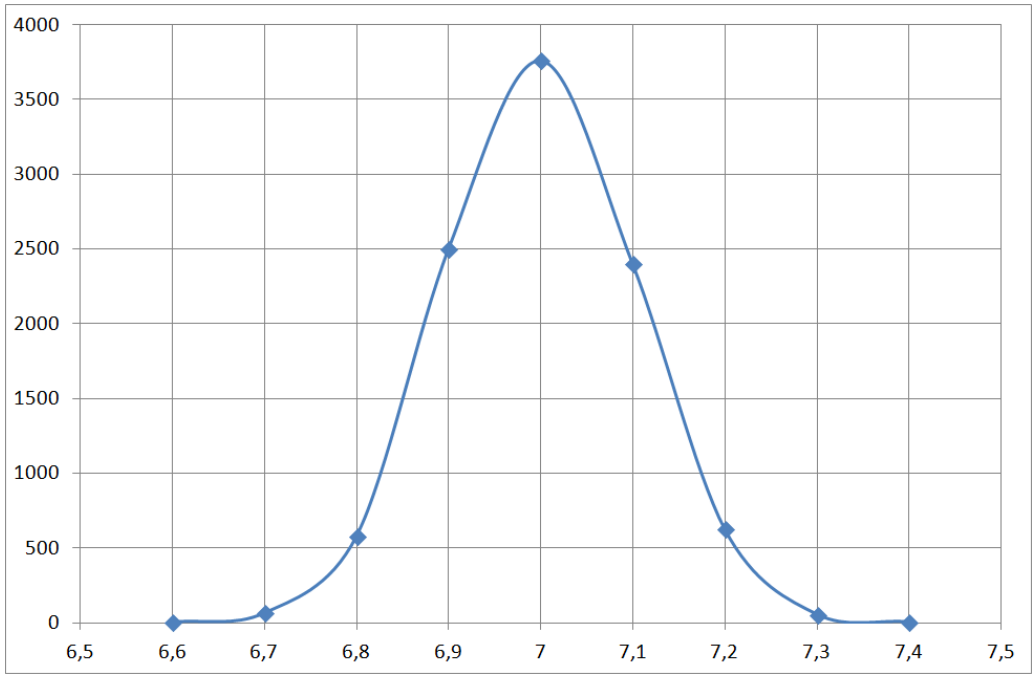

| Valore misurato | Frequenza |
|---|---|
| 6.6 | 3 |
| 6.7 | 64 |
| 6.8 | 579 |
| 6.9 | 2503 |
| 7 | 3763 |
| 7.1 | 2401 |
| 7.2 | 626 |
| 7.3 | 56 |
| 7.4 | 5 |
| Totale | 10000 |

# Indici di Dispersione

- **Campo di variazione (Range)**
  - **Differenza fra il valore massimo ed il valore minimo assunto dalla variabile**

$$x_{\max} - x_{\min}$$

| Range |
| --- |
| 7.4 – 6.6 = 0.8 |



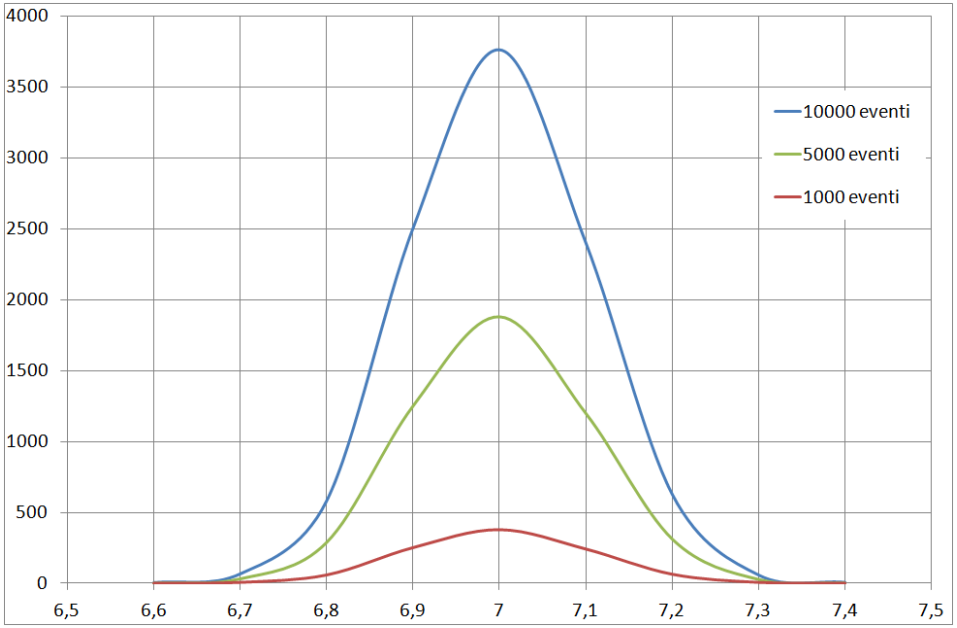

- **Scarto assoluto dalla media**
  - **Valore assoluto degli scarti**

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

# Indici di Dispersione

- **Varianza**
  - Media dei quadrati degli scarti

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$




- **Deviazione standard**
  - Radice quadrata della varianza

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- **Errore standard**

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Necessità di misure ripetute

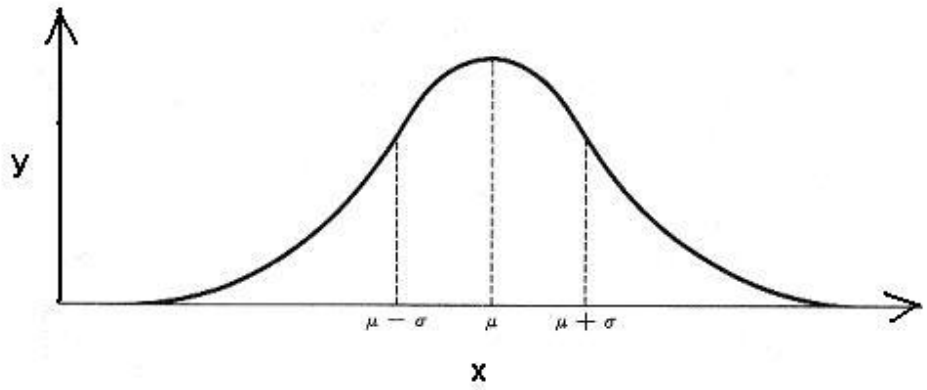
| 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|
| 0.033 | 0.010 | 0.003 |

# Distribuzione di Gauss

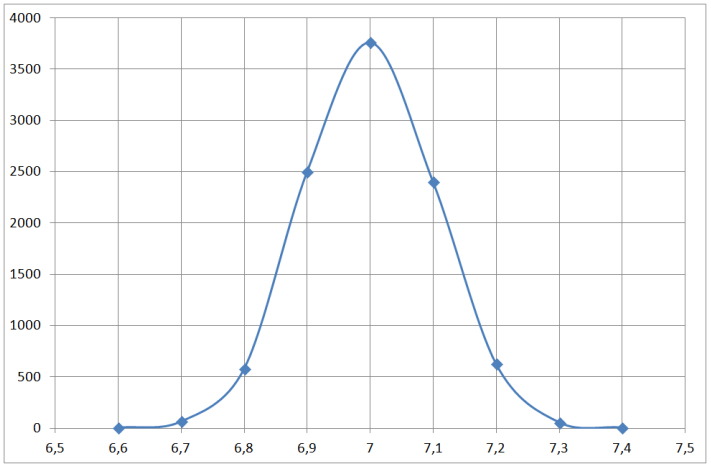
- **Variabili casuali che tendono a concentrarsi attorno ad un valor medio**
  - **È simmetrica rispetto al valor medio**
  - **La media aritmetica coincide con la moda e con la mediana**

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- **μ è la media**
- **$\sigma^2$ è la varianza**

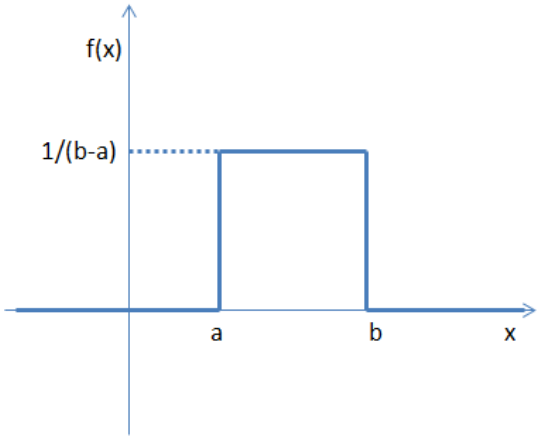



**Esempio: Verifichiamo la lunghezza di 10000 mattoncini LEGO da 7 cm**



# Distribuzione uniforme

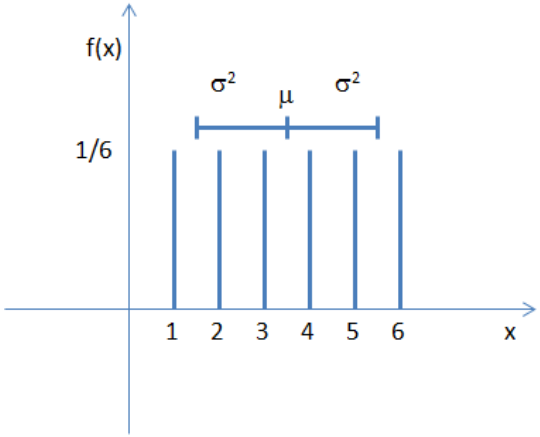
- **E' una distribuzione che attribuisce la stessa probabilità a tutti i punti in un dato intervallo [a,b]**




- **Espressione:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se\ x \in [a,b] \\ 0 & se\ x \notin [a,b] \end{cases}$

- **Media:** $\mu = \dfrac{a+b}{2}$

- **Varianza:** $\sigma^2 = \dfrac{(a-b)^2}{12}$




- **Esempio: Lancio di un dado**
  - **Ogni numero compreso fra 1 e 6 ha uguale probabilità, pari a 1/6**

# Distribuzione di Poisson

- Vogliamo contare il numero di volte in cui un evento si verifica in un certo intervallo
  - Il numero di volte che un telefono squilla in un'ora
  - Il numero di clienti che entra in un ristorante in una sera
- Dividiamo l'intervallo in sottointervalli uguali e piccoli
  - La probabilità dell'evento è la stessa in tutti i sottointervalli, ed è piccola
    - E diminuisce quanto più sono piccoli i sottointervalli
  - Il numero di volte in cui l'evento si verifica in un sottointervallo è indipendente dal numero di volte in cui si è verificato in un altro
    - Eventi che si verificano in sottointervalli diversi sono fra loro indipendenti
- Es.: numero di auto che raggiungono un semaforo in un minuto
  - La probabilità è la stessa per ogni secondo
    - Diminuisce se diminuiamo i sottointervalli
  - L'auto che arriva al secondo 3 è indipendente da una che arriva al secondo 20

# Distribuzione di Poisson

- **Supponiamo che mediamente 3 auto raggiungano il semaforo in un minuto**
  - **Ci chiediamo quale sia la probabilità che ne arrivino 2 in un minuto specifico**
- **Sia $\lambda$ il numero atteso di eventi**
  - **Auto che mediamente raggiungono il semaforo in un minuto (3)**
- **Sia n il numero di eventi di cui vogliamo conoscere la probabilità**
  - **Qual è la probabilità che in un minuto specifico arrivino 2 auto?**

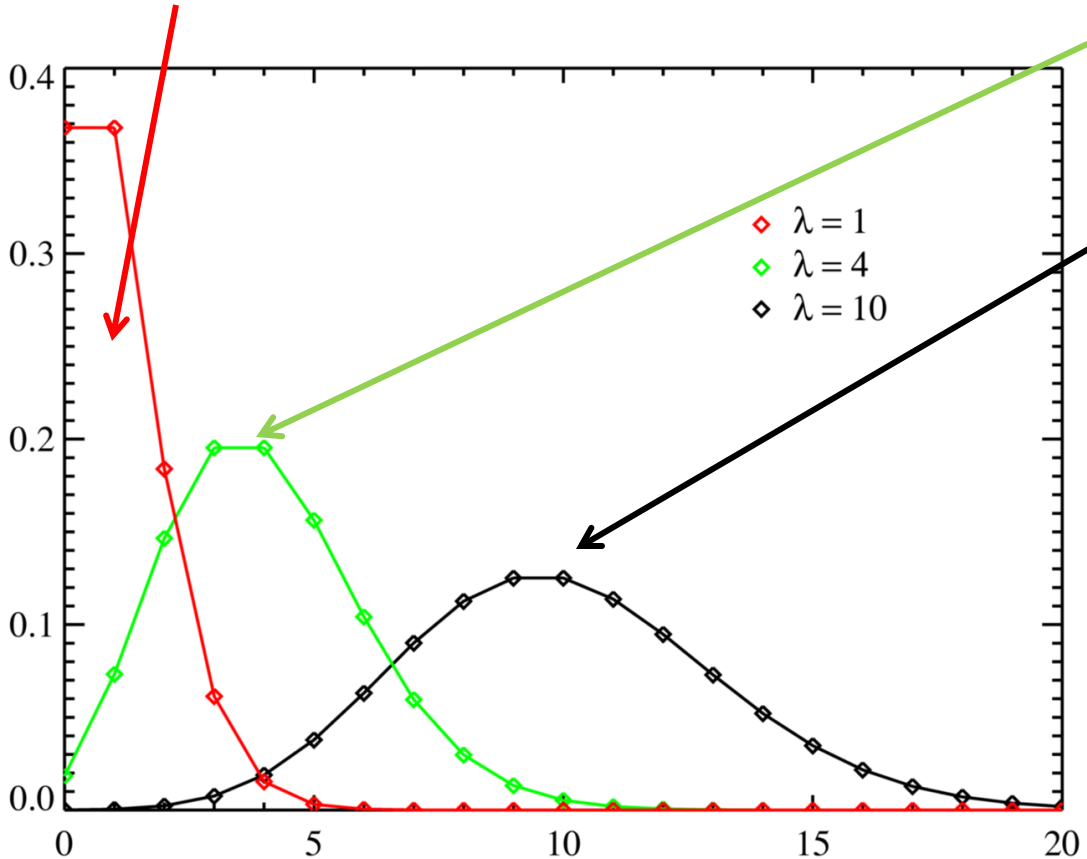
- **Secondo la distribuzione di Poisson:**

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad P(2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0.224$$

- **Fattoriale:**
  - **n! = 1·2·3·…·n-1·n (0!=1)**

# Distribuzione di Poisson

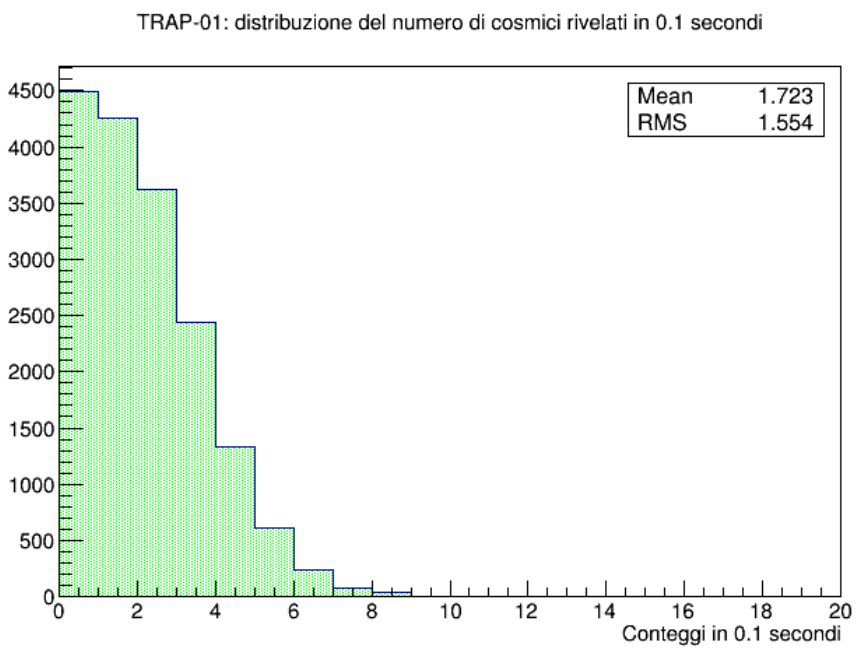
- **Qual è la probabilità che il numero n di eventi si verifichino in un certo intervallo**
  - **Sapendo che mediamente se ne verificano λ**
- **Se λ è piccolo**
  - **Eventi rari**



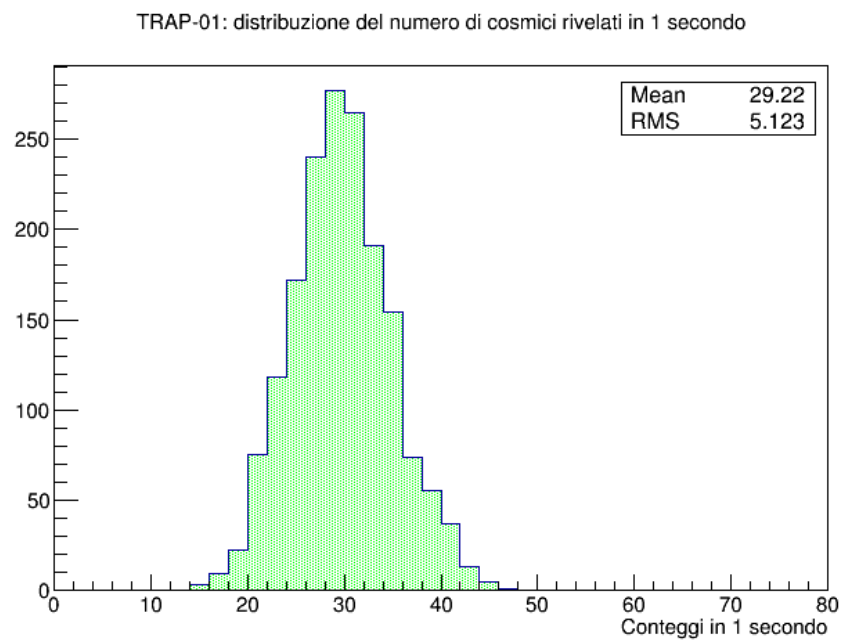

- **All'aumentare di λ**
  - **da Poissoniana a Gaussiana**
- **Deviazione Standard**

$$s = \sqrt{\lambda}$$

# Telescopio TRAP-01




- **Intervallo = 0.1 secondi**
  - **Il numero di conteggi attesi in questo intervallo è basso**
    - **Eventi rari**
- **Distribuzione Poissoniana**




- **Intervallo = 1 secondo**
  - **Il numero di conteggi attesi in questo intervallo è più alto**
    - **Eventi non rari**
- **Distribuzione Gaussiana**